

Mitta ja Integraali

Harjoitus 1

19.5.-25.5. 2009

1. Heität ohutkärkistä tikkaa umpimähkään euklidisen tason yksikköpalloon. Millä todennäköisyydellä osut origoon? Perustele näkemyksesi ja täsmennä kysymystä tarvittaessa.

2. Olkoon $f: X \rightarrow Y$ kuvaus ja $\{V_\gamma : \gamma \in \Gamma\}$ joukkoperhe X :ssä. Näytä, että

$$f\left(\bigcap_{\gamma \in \Gamma} V_\gamma\right) \subset \bigcap_{\gamma \in \Gamma} f(V_\gamma).$$

Etsi esimerkki aidosta inklusiosta.

3. Olkoon $\mathcal{A} = \{A \subset [0, 1] : A \text{ tai } [0, 1] \setminus A \text{ numeroituva}\}$.

(i) Onko \mathcal{A} sigma-algebra?

(ii) Onko mahdollista määritellä tn-mitta $\mu: \mathcal{A} \rightarrow [0, 1]$ siten että $\mu(\{x\}) = 0$ jokaisella $x \in [0, 1]$?

(iii) Voidaanko μ valita kuten kohdassa (ii) mutta lisäksi niin että $\mu(A) = \frac{1}{2}$ jollain $A \in \mathcal{A}$?

4. Olkoon $A \subset [0, 1]$ niiden pisteiden x joukko, joilla on desimaalikehitelmä $x = 0, a_1 a_2 a_3 \dots$, missä $a_n \neq 9$ jokaisella $n \in \mathbb{N}$.

(i) Onko A numeroituva?

(ii) Laske $m_1^*(A)$.

5. Olkoon $C = \{(t, s) \in [-1, 1] \times [-1, 1] : |t| + |s| \leq 1\}$. Laske $m_2^*(C)$. Saat käyttää monisteen Lemmaa 1.35.

6. Näytä että m_2^* on tasossa $\frac{\pi}{2}$ -kierron suhteen invariantti.

Nämä tehtävät liittyvät monisteen sivuihin 1-16, 26-28.

Suoritetuista laskuharjoitustehtävistä saa lisäpisteitä max 20 prosenttia lopputentin maksimipistemäärästä. Lisäpisteet ovat voimassa kesän 2009.