Johdatus inversio-ongelmiin
Laskuharjoitus 3
Ti 7.4.2009, kello 16-18, C124

Kaikissa tehtävissä oletetaan, että X on Hilbert-avaruus.

1. Esitä pääkohdat max-min lauseen todistuksesta operaattorille
$$A = -D^2 + q(x), \quad D(A) = H^2_D(0,1),$$
missä q on sileä funktio.

   Max-min lauseen todistus löytyy kurssikansiosta tai kirjasta "Jost, Partial Differential Equations (sivut 229-240)".

2. Olkoon $K : X \to X$ kompakti ja symmetrinen. Osoita seuraava Fredholm-alternatiivin erikoistapaus
   (1) Jos $(I + K) : X \to X$ on injektiivinen, niin se on bijektio ja $(I + K)^{-1} : X \to X$ on jatkuva.
   (2) Jos $\dim \ker(I + K) = d$, niin on olemassa d-ulotteinen X:n aliavaruus V, jolle pätee:
   $(I + K)u = f$ on ratkeava jos ja vain jos $f \perp V$.

3. Olkoon $K : X \to X$ symmetrinen, kompakti operaattori, jolle $(Kx, x) \geq 0$ kaikilla $x \in X$. Osoita, että on olemassa operaattori $A : X \to X$ jolle
$$A^2 = K.$$

4. Olkoon $u(x,t)$ yhtälön
$$(\partial_x^2 - \partial_t^2)u(x,t) = 0 \quad (x,t) \in \mathbb{R}^2$$
ratkaisu. Olkoon w funktion, jolle
$$w(r,s) = u(x,t),$$
kun
$$\begin{aligned} r &= x + t \\ s &= x - t, \quad t, x \in \mathbb{R}^n. \end{aligned}$$
Osoita, että
$$\partial_r \partial_s w(r,s) = 0.$$