

Johdatus inversio-ongelmiin
Laskuharjoitus 2
Pe 27.3.2009, kello 12-14, C124

Kaikissa tehtävissä oletetaan, että X on Hilbert-avaruus.

1. Osoita, että jos operaattorit $T_n : X \rightarrow X$, $n \in \mathbb{N}$, ovat kompakteja ja $\lim_{n \rightarrow \infty} \|T_n - T\| = 0$, niin T on kompakti.
2. Osoita, että jos $T : X \rightarrow X$ on rajoitettu lineaarikuvaus, jolla $\text{Ran}(T)$ on äärellisulotteinen, niin T on kompakti.
3. Osoita, että jos $h \in C([0, 1]^2)$, niin operaattorille

$$T : L^2(0, 1) \rightarrow L^2(0, 1),$$
$$Tu(x) := \int_0^1 h(x, y)u(y)dy$$

pätee $\|T\| \leq \|h\|_\infty$.

4. * Osoita, että tehtävän 3 operaattori T on kompakti.

Vihje. Approksimoi funktiota $h(x, y)$ paloittain vakioilla funktioilla.