Johdatus inversio-ongelmiin
Laskuharjoitus 1
To 26.3.2009, kello 10-12, B120

1. Osoita, että joukko

$$C^\infty([0,1]) := \{u \in C([0,1]) \mid u|_{(0,1)} \in C^\infty(0,1),\ \text{ja funktiot } \frac{d^k}{dx^k}u|_{(0,1)},\ k \in \mathbb{N}, \text{ on jatkettavissa joukon } C([0,1]) \text{ funktioiksi}\}$$

   on tiheässä avaruudessa $H^1(0,1)$.

   Voit käyttää hyväksi tietoa, että $C^\infty([0,1])$ on tiheässä avaruudessa $L^2(0,1)$.

2. Osoita osittaisintegrointikaava

$$\int_0^1 u(x)w'(x)dx = \Big/_0^1 u(x)w(x) - \int_0^1 u'(x)w(x)dx,$$

   missä $u, w \in H^1(0,1)$.

   Voit käyttää hyväksi tehtävän 1 tulosta.

3. Käy läpi Arzela-Ascoli -lauseen todistus, kun oletetaan, että $f_m \in C^1([0,1])$, $m \in \mathbb{N}$, ja on olemassa vakio $C > 0$ siten, että kaikilla $m \in \mathbb{N}$ ja $x \in [0,1]$ pätee

$$|f_m(x)| \le C, \quad |f'_m(x)| \le C.$$

   Toisin sanoen, osoita käyttämättä Arzela-Ascoli lausetta, että edellisistä oletuksista seuraa: funktioiden f_m, $m \in \mathbb{N}$, joukko on relatiivisesti kompakti avaruudessa $C([0,1])$.

   Arzela-Ascoli -lauseen todistus löytyy kurssikansiosta.

4. Laske operaattorin

$$A := -\frac{d^2}{dx^2}, \quad \mathcal{D}(A) := H^2_D(0,1), \quad A : \mathcal{D}(A) \to L^2(0,1)$$

   ominaisarvot.