

Matemaattinen logiikka

Harjoitus 8

1. Näytä, että funktio $synt(x, y) = x:n$ ja $y:n$ suurin yhteinen tekijä on primitiivirekursiivinen funktio.
2. Oletetaan, että $g, h : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ ovat primitiivirekursiivisiä ja että $g(0) = 0$ ja jos $n > 0$ niin $g(n) < n$. Määritellään funktio $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ siten, että $f(n) = 0$ jos $n = 0$ ja muuten $f(n) = h(f(g(n)))$. Näytä, että f on primitiivirekursiivinen.
3. Näytä, että ääretön $R \subseteq \mathbb{N}$ on rekursiivinen jos ja vain jos on olemassa aidosti kasvava rekursiivinen funktio $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, jolla $R = \{f(n) \mid n \in \mathbb{N}\}$.
4. Oletetaan, että $R \subseteq \mathbb{N}^2$ on rekursiivinen ja että jokaisella $n \in \mathbb{N}$ on olemassa äärettömän monta $m \in \mathbb{N}$ joilla $(n, m) \in R$. Näytä, että on olemassa rekursiivinen injektio $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ jolla $(n, f(n)) \in R$ kaikilla $n \in \mathbb{N}$.
5. Todista: $y + x < A(y, x) < A(y, x + 1) \leq A(y + 1, x)$.
6. Määritellään rekursiolla sanat:
 - (i) 010 on sana,
 - (ii) 0101 on sana,
 - (iii) jos A ja B ovat sanoja, niin $AB1$ on sana (eli esim. 01001011 on sana). Olkoon $M = (\mathbb{N}, +, f, g, \leq, 0, 1)$, missä \leq on luonnollisten lukujen tavallinen järjestys ja $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ ja $g : \mathbb{N}^2 \rightarrow \mathbb{N}$ sellaisia, että kaikilla $n \in \mathbb{N}$ ja $m_0, \dots, m_{n-1} \in \mathbb{N}$ löytyy $k \in \mathbb{N}$ jolla $f(k) = n$ ja $g(k, i) = m_i$ kaikilla $i < n$. Näytä, että $\{n \in \mathbb{N} \mid g(n, 0)g(n, 1)\dots g(n, f(n)-1) \text{ on sana}\}$ on määriteltävä M :ssä.