Matemaattinen logiikka

Harjoitus 7

1. Näytä, että funktiot $c(y,x) = x^y$ ja $C_k(x) = k$, $k \in \mathbb{N}$, ovat primitiivirekursiivisiä.

2. Näytä suoraan määritelmään vetoamalla, että funktio $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $f(x) = 3^x + 1$, on primitiivirekursiivinen (yritä keksiä kätevä ratkaisu).

3. Oletetaan, että R on 1-paikkainen primitiivirekursiivinen relaatio. Merkitään $R_n = \{x \in R |\ x < n\}$. Näytä, että $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ on primitiivirekursiivinen kun $f(n)$ on joukon R_n alkioiden lukumäärä kaikilla $n \in \mathbb{N}$.

4. Oletetaan, että $f, g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ ovat primitiivirekursiivisia ja $(g \circ f)(x) \geq x$ kaikilla $x \in \mathbb{N}$. Näytä, että joukko $\{f(n) |\ n \in \mathbb{N}\}$ on primitiivirekursiivinen.

5. Näytä, että funktio $\pi : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$, $\pi(x,y) = ((x+y)^2 + 3x + y)/2$, on bijektio.

6. Oletetaan, että funktion $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ ja relaatio $R \subseteq \mathbb{N}$ ovat primitiivirekursiivisia ja määritellään $h : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ siten, että $h(0) = 0$ ja jos $n+1 \in R$, niin $h(n+1) = f(h(k))$ missä k on suurin luonnollinen luku niin että $k \leq n$ ja $k \in R \cup \{0\}$ ja muuten $h(n+1) = f(h(l))$, missä l on suurin luonnollinen luku niin että $l \leq n$ ja $l \in (\mathbb{N} - R) \cup \{0\}$. Näytä, että h on primitiivirekursiivinen.