Matemaatinen Logiikka

Harjoitus 6

1. Olkoon T L-teoria siten, että jokaisessa L-struktuurissa ainakin jokin $\phi \in T$ on tosi. Osoita, että on olemassa $\phi_0, ..., \phi_n \in T$, $n \in \mathbb{N}$, siten, että $\vdash \phi_0 \vee ... \vee \phi_n$.

2. Olkoon $L = \{c_i |\ i \in \mathbb{N}\}$ ja T sellainen L-teoria, että jokaisella $M \models T$ ja $a \in M$ löytyy sellainen $i \in \mathbb{N}$, että $c_i^M = a$. Näytä, että löytyy $n \in \mathbb{N}$, että $T \vdash \bigvee_{k<m\leq n} c_k = c_m$.

3. Olkoon T teoria, joka koostuu lauseesta $\forall v_0(\neg(v_0 = f(v_0)) \wedge (v_0 = f(f(v_0))))$ ja lauseista $\forall v_0 ... \forall v_n \exists v_{n+1}(\bigwedge_{i\leq n} \neg v_{n+1} = v_i)$, $n \in \mathbb{N}$. Näytä, että T on täydellinen.

4. Olkoon $M = (\{0, 1, 2\}, \{0\})$ $\{P\}$-struktuuri. Etsi $\{P\}$-lause ϕ siten, että $M \models \phi$ ja $\{\phi\}$ on täydellinen teoria.

5. Näytä, että $Th((\mathbb{N}, +, \times, 0, 1, <))$ ei ole $\aleph_0$-kategorinen.

6. Näytä, että $PA \vdash \forall v_1 \forall v_2 \forall v_0 (v_1 + (v_2 + v_0) = (v_1 + v_2) + v_0)$ (PA=Peanon aksioomat ja täydellisyyslausetta saa käyttää).