

Matemaattinen Logiikka

Harjoitus 5

1. Näytä, että $\vdash (\forall v_0(\phi \vee \psi) \rightarrow (\forall v_0\phi \vee \psi))$, kun v_0 ei esiinny ψ :ssä vapaana.
2. Näytä, että $\{\forall v_0(\phi \rightarrow \psi)\} \vdash (\exists v_0\phi \rightarrow \exists v_0\psi)$.
3. Näytä, että $\{\forall v_0\forall v_1(v_0 = v_1)\} \vdash \exists v_0P(v_0) \rightarrow \forall v_1P(v_1)$.
4. Olkoon T L -teoria, ϕ L -kaava ja $c \notin L$. Näytä, että jos $T \vdash \phi(c/v_0)$ niin $T \vdash \forall v_0\phi$.
5. Olkoon T L -teoria. Näytä, että seuraavat ovat yhtäpitäviä:
 - (i) kaikilla L -lauseilla $\forall v_i\phi$ löytyy vakio $c \in L$ jolla $T \vdash \phi(c/v_i) \rightarrow \forall v_i\phi$,
 - (ii) kaikilla L -lauseilla $\exists v_i\phi$ löytyy vakio $c \in L$ jolla $T \vdash \exists v_i\phi \rightarrow \phi(c/v_i)$.
6. Olkoon $T = \{\forall v_0(\neg(v_0 = f(v_0)) \wedge (v_0 = f(f(v_0))))\}$ $\{f\}$ -teoria. Kuvaile T :n numeroituvasti äärettömät mallit ja näytä, että T ei ole täydellinen.