Matemaattinen logiikka

Harjoitus 3

Jos $n \in \mathbb{N} - \{0,1\}$, niin $\mathbf{Z}_n = (\mathbf{Z}_n, +_n)$ tarkoittaa ryhmää (struktuuria) jossa universumi $\mathbf{Z}_n$ on $\{0, 1, ..., n-1\}$ ja laskutoimitus (2-paikkainen funktio) $+_n$ on määritelty siten että $x +_n y = x + y \mod n$ eli $x +_n y = x + y$ jos $x + y < n$ ja muuten $x +_n y = x + y - n$. $\mathbf{Z}_n \times \mathbf{Z}_m$ tarkoittaa ryhmää jonka universumi on $\{(x,y) | \ x \in \mathbf{Z}_n, \ y \in \mathbf{Z}_m\}$ ja $(x,y) + (x',y') = (x +_n x', y +_m y')$.

1. (i) Onko ryhmä $\mathbf{Z}_2 \times \mathbf{Z}_3$ isomorfinen ryhmän $\mathbf{Z}_6$ kanssa?
   (ii) Onko ryhmä $\mathbf{Z}_2 \times \mathbf{Z}_4$ isomorfinen ryhmän $\mathbf{Z}_8$ kanssa?

2. Etsi ne parit $(a,b)$, $a, b \in \mathbf{Z}_6$, joille löytyy sellainen struktuurin $\mathbf{Z}_6$ automorfismi $f$, että $f(a) = b$.

3. Olkoon $S : \mathbf{Z} \to \mathbf{Z}$ sellainen, että $S(z) = z + 1$ kaikilla $z \in \mathbf{Z}$. Näytä, että struktuurin $(\mathbf{Z}, S)$ automorfismiryhmä $(Aut((\mathbf{Z}, S)), \circ)$ on isomorfinen ryhmän $(\mathbf{Z}, +)$ kanssa.

4. Näytä (Tarskin totuusmääritelmään vetoamalla), että
   $\mathbf{Z}_9 \models \forall v_0 \forall v_1 \exists v_2 (v_0 + v_2 = v_1)$.

5. Olkoon $R \subseteq \mathbb{N}^2$ ja $M = (\mathbb{N}, R)$. Näytä, että $M \models \forall v_0 \exists v_1 (R(v_0, v_1) \to \forall v_1 R(v_0, v_1))$.

6. Onko $\forall v_0 \exists v_1 R(v_0, v_1) \to \exists v_1 R(v_1, v_1)$ validi?