

Matemaattinen Logiikka

Harjoitus 2

Tehtävissä 1-3 etsimme ratkaisua, joka ei käytä täydellisyyslausetta. Deduktio-
lausetta saa käyttää.

1. Näytä, että $\vdash (\neg\neg A \rightarrow A)$.
2. Näytä, että $\vdash ((A \rightarrow \neg A) \rightarrow \neg A)$.
3. Näytä, että $\vdash ((A \wedge B) \rightarrow B)$.
4. (i) Näytä, että $\{(p_0 \rightarrow p_1)\} \not\vdash (p_0 \vee p_1)$.
(ii) Näytä, että jos $\{(A \rightarrow B)\} \vdash (B \rightarrow A)$, niin $\vdash (B \rightarrow A)$.
5. Kaikilla $n \in \mathbb{N}$, olkoon $N_n \in \mathbb{N}$, $f_n : \{0, \dots, N_n\} \rightarrow \{0, 1\}$ ja S_n niiden to-
tuusjakaumien $v : \mathbb{N} \rightarrow \{0, 1\}$ joukko joilla $v(k) = f_n(k)$ jollain $k \leq N_n$. Näytä,
että jos kaikilla $m \in \mathbb{N}$, $\bigcap_{n=0}^m S_n \neq \emptyset$, niin $\bigcap_{n=0}^{\infty} S_n \neq \emptyset$. Vihje: Etsi propositi-
ologiikan lauseet A_n niin että $v(A_n) = 1$ joss $v \in S_n$ ja käytä propositiologiikan
kompaktisuuslausetta.
6. Etsi tehtävän 5 väitteelle lyhyt todistus, joka ei käytä kompaktisuuslausetta.