Matemaattinen logiikka

Harjoitus 10

1. Näytä, että jos $A \subseteq \mathbb{N}$ on ääretön rekursiivisesti numeroituva joukko, niin on olemassa rekursiivinen injektio $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, jolla $A = \{f(n) |\ n \in \mathbb{N}\}$.

2. Näytä, että jokainen ääretön rekursiivisesti numeroituva joukko sisältää äärettömän rekursiivisen joukon.

3. Oletetaan, että $R \subseteq \mathbb{N}^3$ on rekursiivinen relaatio ja olkoon $S \subseteq \mathbb{N}$ sellainen, että $x \in S$ jos kaikilla $z \leq x$ on olemassa $y \in \mathbb{N}$ jolla $(x, y, z) \in R$. Näytä, että relaatio S on rekursiivisesti numeroituva.

4. Oletetaan, että joukot $A_n \subseteq \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{N}$, ovat sellaisia, että joukko

$$\{\pi(m, n) |\ m \in A_n\}$$

on rekursiivisesti numeroituva. Näytä, että näiden joukkojen diagonaalinen leikkaus $\triangle_{n \in \mathbb{N}} A_n = \{m \in \mathbb{N} |\ m \in A_n \text{ kaikilla } n \leq m\}$ on rekursiivisesti numeroituva.

5. Olkoon $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ rekursiivinen ja A niiden $n \in \mathbb{N}$ joukko joilla on olemassa $> n$ monta sellaista $m \in \mathbb{N}$, että $f(m) = n$. Näytä, että A on rekursiivisesti numeroituva.

6. Olkoon M äärellinen L_{exp}-struktuuri. Näytä, että

$$\{\ulcorner \phi \urcorner |\ M \models \phi,\ \phi\ L_{exp} - \text{lause}\}$$

on rekursiivinen joukko.