Matemaatinen Logiikka

Harjoitus 1

1. Määritellään L-funktioiden perhe seuraavasti:
   (a) $id : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $id(x) = x$ kaikilla $x \in \mathbb{N}$, on L-funktio,
   (b) jos $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ on L-funktion ja $n \in \mathbb{N}$ niin myös $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ on L-funktio kun $f(x) = g(x) + n$ kaikilla $x \in \mathbb{N}$,
   (c) jos $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ on L-funktion ja $n \in \mathbb{N} - \{0\}$ niin myös $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ on L-funktio kun $f(x) = ng(x)$ kaikilla $x \in \mathbb{N}$.

Näytä, että $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ on L-funktion jos ja vain jos löytyy $n, m \in \mathbb{N}$, $n \neq 0$, niin että $f(x) = nx + m$ kaikilla $x \in \mathbb{N}$.

2. Näytä, että seuraavat ovat yhtäpitäviä:
(i) $S \vdash A$,
(ii) on olemassa äärellinen jono $(A_i)_{i \leq n}$ propositiolauseita jolla
   (a) $A_n = A$,
   (b) jokaisella $i \leq n$, A_i on joko S:n alkio, aksiooma tai on saatu $T3$:lla jonon aikaisemmista jäsenistä.

3. Jos A ja B ovat äärellisiä merkkijonoja, niin $v(A)$ tarkoittaa A:ssa esiintyvien vasenten sulkumerkkien lukumäärää, $o(A)$ tarkoittaa A:ssa esiintyvien oikeiden sulkumerkkien lukumäärää ja AB tarkoittaa merkkijonoa joka saadaan liittämällä merkkijono B merkkijonon A perään.
Todista, että jos A ja B ovat merkkijonoja ja AB on propositiolause, niin $v(B) \leq o(B)$.

4. Mitkä seuraavista ovat propositiologiikan aksioomeja kun A, B ja C ovat propositiolauseita (perustele vastauksesi):
   (a) $(p_0 \to (p_1 \to p_2))$
   (b) $((A \to B) \to (A \to (A \to B)))$
   (c) $(p_0 \to (B \to C))$
   (d) $((A \to B) \to A)$.