Matemaattinen logiikka

Harjoitus 9

1. Oletetaan, että $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ on vähenevä eli että jos $n \leq m$, niin $f(n) \geq f(m)$. Näytä, että f on primitiivirekursiivinen.

2. Todista: $y + x < A(y, x) < A(y, x + 1) \leq A(y + 1, x)$.

3. Näytä, että kaikilla $a, b \in \mathbb{N}$ löytyy äärellinen $X_{ab} \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ jolla pätee:
(i) $(a, b) \in X_{ab}$,
(ii) jos $(0, x + 1) \in X_{ab}$ niin $(0, x) \in X_{ab}$,
(iii) jos $(y + 1, 0) \in X_{ab}$ niin $(y, 1) \in X_{ab}$,
(iv) jos $(y + 1, x + 1) \in X_{ab}$ niin $(y + 1, x) \in X_{ab}$ ja $(y, A(y + 1, x)) \in X_{ab}$.

4. Näytä, että Ackermannin funktio on rekursiivinen.

5. Olkoon $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ sellainen, että kaikilla $n \in \mathbb{N}$, $f(n)$ on luvun $n^{1/2}$ kokonaisosa. Näytä suoraan määritelmään vetoamalla, että f on määriteltävä struktuurissa $\mathcal{N}_{exp}$.

6. Näytä suoraan määritelmään vetoamalla, että $\{\lceil t \rceil \mid t \text{ on } L_{exp}\text{-vakiotermi}\}$ on määriteltävä joukko struktuurissa $\mathcal{N}_{exp}$. Tehtävässä voidaan pitää tunnettuna, että jonotulo on määriteltävä funktio struktuurissa $\mathcal{N}_{exp}$.