Matemaattinen logiikka

Harjoitus 8

1. Näytä, että funktio $\pi : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$, $\pi(x,y) = ((x+y)^2 + 3x + y)/2$, on bijektio.

2. Näytä, että funktio $syt(x,y) =$ x:n ja y:n suurin yhteinen tekijä on primitiivirekursiivinen funktio.

3. Oletetaan, että $g, h : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ ovat primitiivirekursiivisiä ja että $g(0) = 0$ ja jos $n > 0$ niin $g(n) < n$. Määritellään funktio $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ siten, että $f(n) = 0$ jos $n = 0$ ja muuten $f(n) = h(f(g(n)))$. Näytä, että f on primitiivirekursiivinen.

4. Määritellään rekursiolla sanat:
(i) 010 on sana,
(ii) 0101 on sana,
(iii) jos A ja B ovat sanoja, niin $AB1$ on sana
(eli esim. 01001011 on sana). Olkoon $M = (\mathbb{N}, +, f, g, \leq, 0, 1)$, missä $\leq$ on luonnollisten lukujen tavallinen järjestys ja $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ ja $g : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ sellaisia, että kaikilla $n \in \mathbb{N}$ ja $m_0, ..., m_{n-1} \in \mathbb{N}$ löytyy $k \in \mathbb{N}$ jolla $f(k) = n$ ja $g(k,i) = m_i$ kaikilla $i < n$. Näytä, että $\{n \in \mathbb{N} |\ g(n,0)g(n,1)...g(n,f(n) \dot{-} 1)$ on sana$\}$ on määriteltävä M:ssä.

5. Näytä, että ääretön $R \subseteq \mathbb{N}$ on rekursiivinen jos ja vain jos on olemassa aidosti kasvava rekursiivinen funktio $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, jolla $R = \{f(n) |\ n \in \mathbb{N}\}$.

6. Oletetaan, että $R \subseteq \mathbb{N}^2$ on rekursiivinen ja että jokaisella $n \in \mathbb{N}$ on olemassa äärettömän monta $m \in \mathbb{N}$ joilla $(n,m) \in R$. Näytä, että on olemassa rekursiivinen injektio $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ jolla $(n, f(n)) \in R$ kaikilla $n \in \mathbb{N}$.