

Matemaattinen logiikka

Harjoitus 7

1. Näytä, että funktiot $c(y, x) = x^y$ ja $C_k(x) = k$, $k \in \mathbb{N}$, ovat primitiivirekursiivisiä.
2. Näytä suoraan määritelmään vetoamalla, että funktio $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, $f(x) = 3^x + 1$, on primitiivirekursiivinen (yritä keksiä kätevä ratkaisu).
3. Näytä, että on olemassa funktio $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, joka ei ole primitiivirekursiivinen.
4. Oletetaan, että R on 1-paikkainen primitiivirekursiivinen relaatio. Merkitään $R_n = \{x \in R \mid x < n\}$. Näytä, että $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ on primitiivirekursiivinen kun $f(n)$ on joukon R_n alkioden lukumäärä kaikilla $n \in \mathbb{N}$.
5. Oletetaan, että funktiot $f, g : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ ovat primitiivirekursiivisiä ja määritellään $h : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ siten, että $h(0) = 0$ ja $h(n+1) = f(n)$ jos $h(n)$ on parillinen ja $h(n+1) = g(n)$ muuten. Näytä, että h on primitiivirekursiivinen.
6. Oletetaan, että $f, g : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ ovat primitiivirekursiivisiä ja $(g \circ f)(x) \geq x$ kaikilla $x \in \mathbb{N}$. Näytä, että joukko $\{f(n) \mid n \in \mathbb{N}\}$ on primitiivirekursiivinen.