Matemaatinen Logiikka

Harjoitus 5

1. Näytä, että $\nvdash \exists v_0 \forall v_1((F(v_1) = F(v_0) \vee v_1 = F(v_0)) \wedge R(v_1, F(v_0))) \rightarrow \forall v_0 R(v_0, F(v_0))$.

2. Näytä, että jokainen tautologia on todistuva.

3. Olkoon T L-teoria siten, että jokaisessa L-struktuurissa ainakin jokin $\phi \in T$ on tosi. Osoita, että on olemassa $\phi_0, ..., \phi_n \in T$, $n \in \mathbb{N}$, siten, että $\vdash \phi_0 \vee ... \vee \phi_n$.

4. Olkoon $L = \{c_i |\ i \in \mathbb{N}\}$ ja T sellainen L-teoria, että jokaisella $M \models T$ ja $a \in M$ löytyy sellainen $i \in \mathbb{N}$, että $c_i^M = a$. Näytä, että on olemassa sellaiset $i_0, ..., i_n \in \mathbb{N}$, että $T \vdash \bigvee_{k<m\leq n} c_{i_k} = c_{i_m}$, missä $\bigvee_{k<m\leq n} c_{i_k} = c_{i_m}$ tarkoittaa kaavaa

$$c_{i_0} = c_{i_1} \vee c_{i_0} = c_{i_2} \vee ... \vee c_{i_0} = c_{i_n} \vee c_{i_1} = c_{i_2} \vee ... \vee c_{i_{n-1}} = c_{i_n}.$$

5. Olkoon $M = (\{0,1,2\}, \{0\})$ $\{P\}$-struktuuri. Etsi $\{P\}$-lause ϕ siten, että $M \models \phi$ ja $\{\phi\}$ on täydellinen teoria.

6. Etsi $\aleph_0$-kategorinen teoria joka ei ole täydellinen.