Matemaattinen logiikka

Harjoitus 2

1. (i) Näytä, että $\{p_0 \vee p_1\} \not\vdash p_0 \rightarrow p_1$.
(ii) Näytä, että jos $\{A \rightarrow B\} \vdash B \rightarrow A$, niin $\vdash B \rightarrow A$.

2. Kaikilla $n \in \mathbb{N}$, olkoon $N_n \in \mathbb{N}$, $f_n : \{0, ..., N_n\} \rightarrow \{0, 1\}$ ja S_n niiden totuusjakaumien $v : \mathbb{N} \rightarrow \{0, 1\}$ joukko joilla $v(k) = f_n(k)$ jollain $k \leq N_n$. Näytä, että jos kaikilla $m \in \mathbb{N}$, $\bigcap_{n=0}^{m} S_n \neq \emptyset$, niin $\bigcap_{n=0}^{\infty} S_n \neq \emptyset$. Vihje: Etsi propositiologiikan lauseet A_n niin että $v(A_n) = 1$ joss $v \in S_n$ ja käytä propositiologiikan kompaktisuuslausetta.

3. Etsi tehtävän 2 väitteelle lyhyt todistus, joka ei käytä kompaktisuuslausetta.

Jos $n \in \mathbb{N} - \{0, 1\}$, niin $\mathbf{Z}_n = (\mathbf{Z}_n, +_n)$ tarkoittaa ryhmää (struktuuria) jossa universumi $\mathbf{Z}_n$ on $\{0, 1, ..., n-1\}$ ja laskutoimitus (2-paikkainen funktio) $+_n$ on määritelty siten että $x +_n y = x + y \mod n$ eli $x +_n y = x + y$ jos $x + y < n$ ja muuten $x +_n y = x + y - n$. $\mathbf{Z}_n \times \mathbf{Z}_m$ tarkoittaa ryhmää jonka universumi on $\{(x, y) | \ x \in \mathbf{Z}_n, \ y \in \mathbf{Z}_m\}$ ja $(x, y) + (x', y') = (x +_n x', y +_m y')$.

4. Onko ryhmä $\mathbf{Z}_2 \times \mathbf{Z}_4$ isomorfinen ryhmän $\mathbf{Z}_8$ kanssa?

5. Etsi ne parit (a, b), $a, b \in \mathbf{Z}_6$, joille löytyy sellainen struktuurin $\mathbf{Z}_6$ automorfismi f, että $f(a) = b$.

6. Olkoon $S : \mathbf{Z} \rightarrow \mathbf{Z}$ sellainen, että $S(z) = z + 1$ kaikilla $z \in \mathbf{Z}$. Näytä, että struktuurin $(\mathbf{Z}, S)$ automorfismiryhmä $(Aut((\mathbf{Z}, S)), \circ)$ on isomorfinen ryhmän $(\mathbf{Z}, +)$ kanssa.