

# Matemaattinen logiikka

## Harjoitus 12

1. Näytä, että joukko

$$\{[\phi] \mid PA_{exp} \not\vdash \phi, PA_{exp} \not\vdash \neg\phi, \phi \text{ } L_{exp} \text{ - lause}\}$$

ei ole rekursiivisesti numeroituva.

2. Olkoon  $L = \{0, S, R\}$  aakkosto, missä  $0$  on vakiosymboli,  $S$  yksipaikkainen funktiosymboli ja  $R$  yksipaikkainen relaati symboli. Olkoon

$$M = (\mathbb{N}, 0^M, S^M, R^M)$$

$L$ -struktuuri, missä  $0^M = 0$ ,  $S^M(n) = n + 1$  ja

$$R^M = \{[\phi] \mid \mathcal{N}_{exp} \models \phi, \phi \text{ } L_{exp} \text{ - lause}\}.$$

Näytä, että jos  $T$  on rekursiivinen  $L$ -teoria ja  $M \models T$ , niin  $T$  on epätäydellinen.

3. Olkoon  $L = \emptyset$  ja  $T$  lauseista  $\phi_n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , koostuva  $L$ -teoria, missä

$$\phi_n = \forall v_0 \dots \forall v_n \exists v_{n+1} \bigwedge_{i \leq n} \neg v_{n+1} = v_i.$$

Näytä, että joukko  $\{[\phi] \mid T \vdash \phi, \phi \text{ } L \text{ - lause}\}$  on rekursiivinen.

4. Olkoon  $L = \emptyset$ . Oletetaan että  $k \in \mathbb{N}$ ,  $M$  ja  $M'$  ovat  $L$ -struktuureita joissa  $> k$  alkioita,  $s$  ja  $s'$  ovat näiden tulkintajonoja ja kaikilla  $i < j \leq k$  pätee, että  $s(i) = s(j)$  joss  $s'(i) = s'(j)$ . Näytä, että kaikilla  $L$ -kaavoilla  $\phi$  pätee, että jos  $\phi$ :ssä esiintyy vain muuttujia  $v_0, \dots, v_k$ , niin  $M \models_s \phi$  joss  $M' \models_{s'} \phi$ .

5. Olkoon  $L = \emptyset$ . Näytä, että joukko  $\{[\phi] \mid \vdash \phi, \phi \text{ } L \text{ - lause}\}$  on rekursiivinen.