

Matemaattinen logiikka

Harjoitus 10

1. Olkoon $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ rekursiivinen ja merkitään $f^0 = id$ ja $f^{n+1} = f \circ f^n$. Näytä, että $g(n) = f^n(n)$ on rekursiivinen funktio.
2. Oletetaan, että $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ on rekursiivinen. Näytä, että löytyy L_{exp} -lause ϕ jolla $\mathcal{N}_{exp} \models \phi$ joss $f(\lceil \phi \rceil) = \lceil \phi \rceil$.
3. Sanotaan, että $R \subseteq \mathbb{N}^n$ on lukuteoreettinen jos se on määriteltävä struktuurissa \mathcal{N}_{exp} . Oletetaan, että $R \subseteq \mathbb{N}^2$ on sellainen, että kaikilla lukuteoreettisilla $P \subseteq \mathbb{N}$ löytyy $m \in \mathbb{N}$ jolla $x \in P$ joss $(x, m) \in R$, kaikilla $x \in \mathbb{N}$. Näytä, että R ei ole lukuteoreettinen.
4. Näytä, että joukko $\{\lceil \phi \rceil \mid \mathcal{N}_{exp} \models \phi, \phi \text{ atomilause}\}$ on määriteltävä struktuurissa \mathcal{N}_{exp} .
5. Sanotaan, että ϕ on \exists -lause, jos se on muotoa $\exists v_0 \psi$, missä ψ on atomikaava, jossa ei esiinny muita muuttujia kuin v_0 . Todista, että joukko $\{\lceil \phi \rceil \mid \mathcal{N}_{exp} \models \phi, \phi \text{ } \exists\text{-lause}\}$ on määriteltävä struktuurissa \mathcal{N}_{exp} .