

Matemaattinen Logiikka

Harjoitus 1

1. Mitkä seuraavista ovat propositiologiikan aksioomeja kun A, B ja C ovat propositiolauseita (perustele vastauksesi):

- (a) $(p_0 \rightarrow (p_1 \rightarrow p_2))$
- (b) $((A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow (A \rightarrow B)))$
- (c) $(p_0 \rightarrow (B \rightarrow C))$
- (d) $((A \rightarrow B) \rightarrow A)$.

Tehtävien 2-4 kaltaisissa tehtävissä etsimme aina ratkaisua, joka ei käytä täydellisyyslauseita. Deduktiolauseita saa käyttää ellei muuta sanota.

2. Näytä, että $\vdash (\neg\neg A \rightarrow A)$.

3. Näytä, että $\vdash (A \rightarrow \neg\neg A)$.

4. Näytä, että $\vdash (A \rightarrow (A \vee B))$

5. Näytä, että seuraavat ovat yhtäpitäviä:

- (i) $S \vdash A$,
- (ii) on olemassa äärellinen jono $(A_i)_{i \leq n}$ propositiolauseita jolla
 - (a) $A_n = A$,
 - (b) jokaisella $i \leq n$, A_i on joko S :n alkio, aksiooma tai on saatu $T3$:lla jonon aikaisemmista jäsenistä.

Jos A ja B ovat äärellisiä merkkijonoja, niin $v(A)$ tarkoittaa A :ssa esiintyvien vasenten sulkumerkkien lukumäärää, $o(A)$ tarkoittaa A :ssa esiintyvien oikeiden sulkumerkkien lukumäärää ja AB tarkoittaa merkkijonoa joka saadaan liittämällä merkkijono B merkkijonon A perään.

6. Todista, että jos A ja B ovat merkkijonoja ja AB on propositiolause, niin $v(B) \leq o(B)$.