

## Funktioteoria I — Harjoitus 13 (14. 12. 2009)

1. Olkoon  $A \subset \mathbb{C}$  alue.

a) Jos  $g$  on reaaliarvoinen funktio  $A$ :ssa, miten määrittelisit alaraja-arvon  $\liminf_{z \rightarrow \zeta} g(z)$  reunapisteessä  $\zeta \in \partial_\infty A$  (reuna laajennetun tason suhteen)?

b) Todista *minimiperiaate*: jos  $f: A \rightarrow \mathbb{C}$  on analyyttinen ja ei saa arvoa 0 sekä

$$\liminf_{z \rightarrow \zeta} |f(z)| \geq m \quad \text{kaikilla } \zeta \in \partial_\infty A,$$

niin  $|f(z)| \geq m$  alueessa  $A$ . Näytä esimerkiksi, että tulos ei aina päde, jos  $f$  saa arvon 0.

[*Vihje*. Muista maksimiperiaate.]

2. Oletetaan, että  $f$  on analyyttinen punkteeratussa kiekossa  $D(0, 1) \setminus \{0\}$ . Olkoon  $\gamma_r(t) = re^{it}$ , kun  $0 \leq t \leq 2\pi$  ja  $0 < r < 1$ . Näytä, että integraali  $\int_{\gamma_r} f(z) dz$  on riippumaton  $r$ :stä.

[*Ohje*. Polkujen deformointilause.]

3. Laske integraali

$$\int_{\partial D(0,2)} \frac{e^z}{z^3 + z} dz,$$

kun  $\partial D(0, 2)$  on vastapäivään suunnistettu.

[*Ohje*. Polkujen deformointi ja Cauchyn kaava. Katso luentojen esimerkkiä 10.16.]

4. Olkoon  $A \subset \mathbb{C}$  on alue, joka ei sisällä origoa ja jossa pätee  $n(\gamma, 0) = 0$  jokaisella umpinaisella paloittain  $C^1$  polulla  $\gamma$ . Näytä, että logaritmillä on haara  $A$ :ssa, ts. on olemassa analyyttinen  $f: A \rightarrow \mathbb{C}$  siten, että  $e^{f(z)} = z$  kaikilla  $z \in A$ .

Mikä on ehdon  $n(\gamma, 0) = 0$  tulkinta?

[*Ohje*.  $1/z$ :lla on integraalifunktio  $f$   $A$ :ssa; miksi? Valitse siinä vakiotermei sopivasti ja tutki funktion  $ze^{-f(z)}$  derivaattaa.]

5. (Kertaustehtävä Möbius-kuvauksista.) Määritä (mahdollisimman yksinkertaisessa muodossa) kaikki Möbius-kuvaukset  $f$ , joille  $f(H) = H$  ja  $f(i) = i$ , kun  $H = \{z : \operatorname{Im} z > 0\}$  on ylempi puolitaso.

**Viimeinen luento** on pe 11.12. Silloin kertausta kurssin loppuosan asioista. Lisäksi tarjotaan kahvia/teetä ja pullaa, joten kaikkien kurssille osallistuneiden läsnäolo on toivottavaa!

**Nämä harjoitukset** ovat normaalisti ma 14.12.

**2. kurssikoe** on ke 16.12 klo 11.00–13.00 salissa CK112. Koealueena muistiinpanojen luvut 6–10 (varsinaisesti s. 45 kaksoissuhteesta alkaen sivulle 91 saakka) sekä harjoitukset 7–13. Ei laskimia eikä taulukkokirjoja!