Funktioteoria I — Harjoitus 11 (30. 11. 2009)

1. Oletetaan, että f on analyyttinen kiekon $\overline{D}(z_0, r)$ ympäristössä. Tarkastellaan Cauchy-integraalia
$$\int_{\partial D(z_0,r)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta.$$
Mikä on tämän arvo silloin, kun z on kiekon $\overline{D}(z_0, r)$ *ulkopuolella*?

2. Laske
$$\int_\gamma \frac{e^z + z}{z-2}\, dz,$$
kun $\gamma(t) = re^{it}$, $0 \le t \le 2\pi$, ja a) $r = 1$, b) $r = 3$.

3. a) Tarkista derivointikaavat $\dfrac{d}{dz}\sin z = \cos z$ ja $\dfrac{d}{dz}\cos z = -\sin z$.
b) Ratkaise yhtälö $\sin z = 0$.
c) Ratkaise yhtälö $\cos z = 2$.

4. Funktio $z \mapsto \sin z$ häviää origossa. Mikä on tämän nollakohdan kertaluku? Miten $g(z) = (\sin z)/z$ on määriteltävä origossa, jotta se olisi analyyttinen? Mikä on g:n origokeskinen Taylor-sarja?

5. Olkoot $f_1, f_2, \ldots$ analyyttisiä funktioita avoimessa joukossa $A \subset \mathbb{C}$, ja oletetaan, että $f_n \to f$ tasaisesti jokaisessa A:n kompaktissa osajoukossa. Osoita, että f on analyyttinen A:ssa. [*Vihje.* Cauchy ja Morera.]

6. Olkoon $A \subset \mathbb{C}$ avoin joukko ja $f\colon A \to \mathbb{C}$ jatkuva. Oletetaan, että $\int_{\partial R} f\, dz = 0$ aina, kun $R \subset A$ on suljettu suorakulmio, jonka sivut ovat koordinaattiakseleiden suuntaisia. Näytä, että f on analyyttinen.

   [*Ohje.* Tutki, mitä Cauchyn integraalilauseen todistuksessa tehtiin ja mitä siinä oikeastaan tarvittiin. Käytä myös viimeaikaisia luentojen tuloksia.]