Funktioteoria I — Harjoitus 10 (23. 11. 2009)

1. Sarjan $\sum_k a_k z^k$ suppenemissäde on R. Mikä on sarjan $\sum_k a_k z^{2k}$ suppenemissäde?

2. Etsi integraalifunktiot seuraaville funktioille

$$\text{a)} \quad ze^z, \qquad \text{b)} \quad \frac{1}{(z-i)^2}, \qquad \text{c)} \quad \frac{1+z}{z^2}.$$

   Millaisissa kompleksitason alueissa (mahdollisimman laajoissa) löytämäsi integraalifunktiot ovat määriteltyjä?

3. Olkoon $\gamma(t) = a\cos t + ib\sin t$, kun $0 \le t \le 2\pi$ ja $a, b > 0$ (ellipsi positiivisesti suunnistettuna; piirrä kuva). Laske integraali

$$\int_\gamma \frac{dz}{z}.$$

   [*Ohje*. Jaa polku kahteen osaan ja muista, että $1/z$:lla on integraalifunktio sopivissa $\mathbb{C}$:n osa-alueissa.]

4. Määritä $\displaystyle\int_\gamma e^{e^z}\,dz$, kun $\gamma(t) = \dfrac{(1+t^3)e^{2\pi i t^7}}{1+4t}$, $0 \le t \le 2$.

5. Olkoon $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{C}$ paloittain C^1 polku. Oletetaan, että f ja $f_1, f_2, \ldots$ ovat jatkuvia funktioita, joille pätee $f_n \to f$ *tasaisesti* polulla γ, ts.

$$\lim_{n\to\infty} \sup\{|f_n(z) - f(z)| : z \in \Gamma\} = 0,$$

   kun merkitään $\Gamma = \{\gamma(t) : a \le t \le b\}$. Osoita, että

$$\lim_{n\to\infty} \int_\gamma f_n\,dz = \int_\gamma f\,dz.$$

   [*Apu*. Seuraavan tehtävän arvio.]

6. Olkoot γ ja Γ kuten edellä, ja olkoon f jatkuva funktio, jolle pätee $|f| \le M$ joukossa Γ. Osoita, että

$$\left|\int_\gamma f\,dz\right| \le \int_\gamma |f|\,|dz| \le M\ell(\gamma),$$

   jossa $\ell(\gamma)$ on polun γ pituus (luentojen apulause 8.9).

   [*Ohje*. Näytä aluksi, että $\left|\int_a^b g(t)\,dt\right| \le \int_a^b |g(t)|\,dt$, kun g on reaaliakselin välillä $[a,b]$ jatkuva kompleksiarvoinen funktio. Tässä voisi esimerkiksi valita $\varphi = \arg\int_a^b g(t)\,dt$ ja tarkastella lukua $e^{-i\varphi}\int_a^b g(t)\,dt$.]