Funktioteoria I — Harjoitus 9 (16. 11. 2009)

1. Olkoot (a_n) ja (b_n) ei-negatiivisten reaalilukujen jonoja siten, että $\limsup_{n\to\infty} a_n = A < \infty$ ja $\limsup_{n\to\infty} b_n = B < \infty$. Todista huolellisesti yläraja-arvon määritelmään tai tehtävän 8.6 kriteeriin perustuen, että $\limsup_{n\to\infty} a_n b_n \leq AB$. Anna esimerkki jonoista, joille epäyhtälö on aito.

2. Oletetaan, että potenssisarjan $\sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k$ suppenemissäde on $R > 0$ ja sen summa häviää identtisesti. Perustele, että $a_k = 0$ kaikilla k.

3. Laske potenssisarjan $\sum_{k=1}^{\infty} k z^k$ summafunktio kiekossa $D(0, 1)$ nojautuen potenssisarjojen termeittäin derivointia koskevaan lauseeseen.

4. Olkoon $\gamma(t) = e^{2\pi i t}$, $0 \leq t \leq 1$, yksikköympyrän parametriesitys. Laske integraalit

$$\int_\gamma (z-1)\,dz, \qquad \int_\gamma (z-1)\,|dz|, \qquad \int_\gamma |z-1|\,|dz|.$$

   [*Apu.* Viimeisessä lienee tarpeen käyttää sopivia trigonometrian kaavoja.]

5. Laske polkuintegraali $\int_\gamma |z|\,dz$, kun γ on a) jana pisteestä -1 pisteeseen 1, b) yksikköympyrän ylemmässä puolitasossa sijaitseva kaari pisteestä -1 pisteeseen 1. [Aloita valitsemalla mielekkäät parametriesitykset.]

6. a) Olkoot (a_k) ja (b_k) kompleksilukujonoja. Todista (esim. induktiolla) Abelin osittaissummauskaava

$$\sum_{k=1}^{n} a_k b_k = \sum_{k=1}^{n-1} (a_k - a_{k+1}) s_k + a_n s_n,$$

   jossa $s_n = \sum_{k=1}^{n} b_k$, kun $n \geq 1$.
   b) Näytä Abelin kaavan avulla, että sarja $\sum_{k=1}^{\infty} z^k / k$ suppenee, kun $|z| = 1 \neq z$.