Funktioteoria I — Harjoitus 8 (9. 11. 2009)

1. Käy läpi yksityiskohtaiset perustelut sille, että eksponenttifunktio $z \mapsto e^z$ määrittelee konformisen bijektion vaakasuoralta vyöltä $0 < \operatorname{Im} z < a$ sektorille $0 < \arg w < a$, kun $0 < a < 2\pi$. (Käytä vapaasti hyväksi kaikkia eksponenttifunktiota koskevia tietojamme.)

   Mitkä ovat pystysuorien janojen ja vaakasuorien viivojen kuvat tässä kuvauksessa? Totea, että ne leikkaavat toisensa kohtisuorasti. (Piirrä.)

2. Olkoot U ja V kaksi avointa kiekkoa $\mathbb{C}$:ssä, joista kumpikaan ei sisälly toiseensa, ja oletetaan, että $A = U \cap V \neq \emptyset$. Selosta ja piirrä, miten "linssimäinen" alue A voidaan konformisesti kuvata yksikkökiekolle $D(0, 1)$. (Ei ole tarkoitus etsiä kuvauksen tarkkaa lauseketta vaan esittää, miten kuvaus voidaan vaiheittain rakentaa ja miten eri vaiheisiin liittyvät parametrit on valittava.)

   [*Vihje.* Aloita kuvaamalla ympyröiden ∂U ja ∂V leikkauspisteet pisteiksi 0 ja ∞.]

3. Näytä, että jos kompleksinen sarja $\sum_{k=1}^{\infty} z_k$ suppenee itseisesti, se suppenee myös tavallisessa mielessä. Mikä olisi helpoin esimerkki suppenevasta sarjasta, joka ei suppene itseisesti?

4. Määritä seuraavien potenssisarjojen suppenemissäteet ja suppenemiskiekot:

$$\text{a)} \quad \sum_{k=0}^{\infty} k(z-i)^k, \qquad \text{b)} \quad \sum_{k=0}^{\infty} k!\, z^k, \qquad \text{c)} \quad \sum_{k=0}^{\infty} z^{k!}.$$

5. Funktiolla $f(z) = 1/(1-z)$ on tunnetusti kiekossa $D(0, 1)$ potenssisarjaesitys geometrisen sarjan summana:

$$f(z) = \frac{1}{1-z} = \sum_{k=0}^{\infty} z^k.$$

   Kehitä f potenssisarjaksi (suuremmassa) kiekossa $D(-1, 2)$. Mikä on tämän perusteella derivaatan $f^{(k)}(-1)$ arvo? [*Apu.* $w = z + 1$.]

6. Olkoot s ja $a_1, a_2, \ldots$ reaalilukuja. Todista, että $\limsup_{n\to\infty} a_n = s$ jos ja vain jos seuraavat ehdot ovat voimassa:

   i) Aina kun $s' > s$, niin $a_n < s'$ lukuunottamatta äärellisen monta indeksiä n (ts. on olemassa n_0 siten, että $a_n < s'$ kaikilla $n \geq n_0$).
   ii) Aina kun $s' < s$, niin $a_n > s'$ äärettömän monella n (ts. jokaisella n_0 on olemassa $n \geq n_0$, jolle $a_n > s'$).

   Mikä on vastaava karakterisaatio tapaukselle $\limsup_{n\to\infty} a_n = \infty$? (Ei tarvitse todistaa.)