Funktioteoria I — Harjoitus 7 (2. 11. 2009)

1. Osoita, että jos Möbius-kuvaus f kuvaa joukon $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$ itselleen, niin esityksessä
$$f(z) = \frac{az+b}{cz+d}$$
kertoimet a, b, c, d voidaan valita reaalisiksi. (Käänteinenkin on selvästi totta!)

2. Laske kaksoissuhteet a) $(0, 1, 2, 3)$, b) $(0, i, -i, \infty)$ ja c) $(1, 0, 1, \infty)$.

3. Tutki, mille joukoille Möbius-kuvaus
$$f(z) = \frac{z+1}{z}$$
kuvaa seuraavat joukot: a) imaginaariakseli, b) oikea puolitaso $\{z : \operatorname{Re} z > 0\}$, c) yksikköympyrä, d) yksikkökiekko $D(0, 1)$. Piirrä kuva.

4. Etsi jokin Möbius-kuvaus, joka vie puolitason $A = \{z = x+iy : x > y\}$ kiekolle $D(\infty, 1) = \{\infty\} \cup \{z : |z| > 1\}$. Piirrä kuva.

   [*Ehdotus.* Poimi mukavat reunapistekolmikot; huolehdi, että ne ovat samassa järjestyksessä alueisiin nähden.]

5. Olkoot $z_1, z_2, z_3, z_4 \in \overline{\mathbb{C}}$ neljä eri pistettä. Näytä, että on olemassa (yksikäsitteinen) Möbius-kuvaus, joka vaihtaa pisteet z_1 ja z_2 keskenään sekä pisteet z_3 ja z_4 keskenään.

   [*Vihje.* Tarkastele ensin nelikkoa $z_0, 1, 0, \infty$.]

6. a) Funktion f *kiintopisteitä* ovat ne z, joille $f(z) = z$. Osoita, että Möbius-kuvauksella, joka ei ole identtinen kuvaus, on laajennetussa kompleksitasossa joko yksi tai kaksi kiintopistettä.
   [*Ohje.* Erottele tapaukset $c = 0$ ja $c \neq 0$. Voit pitää tunnettuna, että jokaisella polynomiyhtälöllä on ratkaisuja $\mathbb{C}$:ssä; todistamme tämän myöhemmin.]
   b) Mitkä ovat Möbius-kuvausten $z \mapsto z + 1$ ja $z \mapsto 1/z$ kiintopisteet?

Viikolla 26.10.–1.11. ei opetusta. Jatkamme ma 2.11. (harjoitukset ja luento).