

## Funktioteoria I — Harjoitus 5 (12. 10. 2009)

1. Ratkaise yhtälö  $e^{2z} - 2e^z + 2 = 0$  kompleksitasossa.
2. Määritä pystysuorien  $x = c$  ( $c \in \mathbb{R}$ ) ja vaakasuorien  $y = c'$  ( $c' \in \mathbb{R}$ ) kuvat kuvauksessa  $z \mapsto z^2$ . Piirrä kuvio; pane erityisesti merkille, miten kuvakäyrät leikkaavat toisiaan origon ulkopuolella. Miksi origo on poikkeus?  
[Ohje. Hajota reaali- ja imaginaariosaan ja etsi yhtälö niiden välille ko. suorien pisteissä.]
3. Määritä suoran  $y = x$  kuva eksponenttifunktiossa  $z \mapsto e^z$ . Hahmottele kuvio.
4. Oletetaan, että  $f$  on analyyttinen kompleksitasossa ja  $|f(z)| = |z|$  kaikilla  $z$ . Mitä muotoa funktio  $f$  on? [Vihje.  $f(z)/z$ .]
5. Tarkista, että pisteen  $z = x + iy \in \mathbb{C}$  vastinpiste Riemannin pallolla on

$$\sigma(z) = \frac{1}{1 + |z|^2}(x, y, |z|^2) = \left( \frac{x}{1 + x^2 + y^2}, \frac{y}{1 + x^2 + y^2}, \frac{x^2 + y^2}{1 + x^2 + y^2} \right).$$

Johda sitten pallometriikan lausekkeet

$$d(z, w) = \frac{|z - w|}{\sqrt{1 + |z|^2}\sqrt{1 + |w|^2}}, \quad d(z, \infty) = \frac{1}{\sqrt{1 + |z|^2}},$$

kun  $z, w \in \mathbb{C}$ .

[Apu. Käytä yhdenmuotoisia kolmioita tai muodosta parametriesitys Riemannin pallon pohjoisnavan ja tason pisteen  $z$  kautta kulkevalle suoralle ja ratkaise, milloin se leikkaa Riemannin pallon.]

6. Olkoon  $A \subset \mathbb{C}$  mikä tahansa alue, joka sisältää yksikköympyrän  $|z| = 1$ . Osoita, että argumentilla (ja siten myös logaritmillä) ei ole jatkuvaa haaraa  $A$ :ssa. Toisin sanoen ei ole jatkuvaa funktiota  $\varphi: A \rightarrow \mathbb{R}$  siten, että  $|z|e^{i\varphi(z)} = z$  kaikilla  $z \in A$ .  
[Ehdotus. Olkoon  $\gamma(t) = e^{it}$ , kun  $0 \leq t \leq 2\pi$ . Tee vastaoletus ja tutki funktiota  $g = \varphi \circ \gamma: [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}$ .]

### Aikataulua:

- 1. kurssikoe ke 21.10. klo 15.15–17.15 salissa CK112; koealue ilmoitetaan myöhemmin.
- Luennot ma 19.10. ja pe 23.10. normaalisti; ma kertausta ja mahdollisuus kysymyksiin.
- Myös laskuharjoitukset ma 19.10. normaalisti.
- Viikolla 26.10.–1.11. ei opetusta. Jatkamme ma 2.11.