Funktioteoria I — Harjoitus 3 (28. 9. 2009)

1. Tarkastellaan polynomiyhtälöä $a_n z^n + \cdots + a_1 z + a_0 = 0$, jonka kertoimet $a_0, \ldots, a_n$ ovat reaaliset. Näytä, että jos kompleksiluku $z = x + iy$ on sen ratkaisu, myös liittoluku $\overline{z} = x - iy$ on ratkaisu.

2. Tason suora voidaan tunnetusti esittää muodossa $ax + by = c$, jossa $a, b, c \in \mathbb{R}$ ja ainakin toinen kertoimista a, b on nollasta poikkeava. Näytä, että kompleksimerkinnöin ($z = x+iy$) tämä voidaan yhtäpitävästi kirjoittaa muodossa $\alpha z + \overline{\alpha}\,\overline{z} = 2\gamma$ eli $\mathrm{Re}(\alpha z) = \gamma$, jossa $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ ja $\gamma \in \mathbb{R}$. Milloin kyseessä on vaakasuora tai pystysuora? Milloin suora kulkee origon kautta?

3. Laske raja-arvo
$$\lim_{z \to 1} \frac{z^3 - 1}{z^2 - 1}.$$

4. Olkoot $f, g \colon A \to \mathbb{C}$, jossa $A \subset \mathbb{C}$, ja oletetaan, että f ja g ovat molemmat jatkuvia pisteessä $a \in A$. Osoita huolellisesti jatkuvuuden ϵ–δ-määritelmään perustuen, että $f + g$ ja fg ovat jatkuvia a:ssa.

   [Mieti todistus itse tai kopioi vastaavia reaalimuuttujan funktioiden todistuksia.]

5. Oletetaan, että $f \colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ on analyyttinen. Osoita erotusosamäärää tutkimalla, että $g(z) = \overline{f(\overline{z})}$ on analyyttinen.

6. Palautetaan mieleen, että kuvaus $L \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ on $\mathbb{R}$-lineaarinen, mikäli
$$L(az + bw) = aL(z) + bL(w) \tag{1}$$
   kaikilla $a, b \in \mathbb{R}$ ja $z, w \in \mathbb{R}^2$.

   a) Näytä, että kun tulkitaan tason $\mathbb{R}^2$ pisteet kompleksilukuina, jokainen tällainen L saa yksinkertaisen esitysmuodon
$$L(z) = \alpha z + \beta \overline{z}, \tag{2}$$
   jossa $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$. Kääntäen jokainen muotoa (2) oleva kuvaus on $\mathbb{R}$-lineaarinen.
   b) Kuvaus L on $\mathbb{C}$-lineaarinen, mikäli (1) pätee kaikilla $a, b \in \mathbb{C}$. Osoita, että esityksessä (2) tämä toteutuu täsmälleen silloin, kun $\beta = 0$.
   c) Vakuuttaudu siitä, että yllä L on analyyttinen täsmälleen b-kohdan tilanteessa eli silloin kun $\beta = 0$. (Tähän tarvittavat seikat on esitetty luennoilla; kokoa ne vain yhteen.)

1. kurssikoe pidetään ke 21.10. klo 15.15–17.15 salissa CK112 (Exactum).