Funktioteoria I — Harjoitus 2 (21. 9. 2009)

1. Määritä luvun $(1+i\sqrt{3})^8$ moduli ja argumentti sekä reaali- ja imaginaariosa.

2. Lausu $\sin^5\varphi$ muotoa $\sin k\varphi$ $(k \geq 1)$ olevien termien lineaarikombinaationa. [*Ohje.* Eulerin ja Moivre'n kaavat.]

3. Ratkaise yhtälö $z^3 = -1$. Piirrä kuva, josta käy ilmi juurten sijainti kompleksitasossa.

4. Piirrä ja kuvaile geometrisin käsittein seuraavien ehtojen määrittelemät kompleksitason osajoukot:

   a) $1 \leq |z| < 2$
   b) $|2z - i| = 1$
   c) $|\arg z| < \pi/4$
   d) $|z-4| > |z|$
   e) $\operatorname{Im}(e^{-i\alpha}z) = 0$, jossa $-\pi < \alpha < \pi$ kiinteä.

   Mitkä näistä joukoista ovat avoimia ja mitkä suljettuja? Mitkä ovat rajoitettuja ja mitkä eivät? (Lyhyet perustelut riittävät.)

   [*Apu.* Joissakin kohdissa voi olla hyödyllistä esittää z muodossa $re^{i\varphi}$.]

5. Olkoon $A \subset \mathbb{C}$ ja $f\colon A \to \mathbb{C}$ jokin funktio. Oletetaan, että a on joukon A kasautumispiste ja $w \in \mathbb{C}$. Osoita, että seuraavat ehdot ovat yhtäpitävät:

   a) $\lim\limits_{A \ni z \to a} f(z) = w$.
   b) Aina kun (z_n) on jono joukon $A \setminus \{a\}$ pisteitä, jolle $z_n \to a$, niin pätee $f(z_n) \to w$. (Huom. Sanotunlaisia jonoja (z_n) on olemassa, koska a on kasautumispiste!)

   Tämä täydentää luennolla ja muistiinpanojen jaksossa 2 esitetyn lauseen todistuksen.

6. Kunta K on *järjestyvä*, jos on olemassa sellainen osajoukko $P \subset K$, että

   i) jos $x, y \in P$, niin $x + y \in P$ ja $xy \in P$;
   ii) kullekin $x \in K$ pätee täsmälleen yksi ehdoista $x \in P$, $-x \in P$ tai $x = 0$, ts. K on erillinen yhdiste joukoista P, $-P = \{-x : x \in P\}$ ja $\{0\}$.

   (Varsinainen järjestysrelaatio $<$ saadaan määrittelemällä $x < y \Leftrightarrow y - x \in P$.)

   a) Totea, että $\mathbb{R}$ on järjestyvä, kun valitaan $P = (0, \infty)$.
   b) Näytä, että $\mathbb{C}$ ei ole järjestyvä millään P. [*Ehdotus.* Tee vastaoletus ja tutki pisteiden $\pm 1, \pm i$ kuulumista P:hen.]

Huom. Perjantain luennot ovat jatkossa klo 9.25–12.00 (pidetään vain yksi tauko).