

Funktioteoria I — Harjoitus 1 (14. 9. 2009)

1. Imaginaariyksiköllä i on perusominaisuus $i^2 = -1$. Mitä ovat i^3 , i^4 ja i^5 ? Millaista yleistä sääntöä mahtaakaan i^n noudattaa, kun n on positiivinen kokonaisluku?
2. Olkoot $z = 1 + i$ ja $w = -3 + 4i$. Laske \bar{w} , $|w|$, $1/w$, $z + w$, zw sekä z/w .
3. Tarkista, että liittolukuoperaatiolla on ominaisuudet $\overline{z + w} = \bar{z} + \bar{w}$ ja $\overline{zw} = \bar{z} \cdot \bar{w}$, kun z ja w ovat mielivaltaisia kompleksilukuja.
4. Todista kompleksiluvulle $z = x + iy$ kaavat

$$\operatorname{Re} z = \frac{1}{2}(z + \bar{z}), \quad \operatorname{Im} z = \frac{1}{2i}(z - \bar{z}).$$

5. Oletetaan, että $|z| < 1$ ja $|w| = 1$. Näytä, että luvun

$$\frac{z - w}{1 - \bar{z}w}$$

moduli on aina 1.

Lisäpisteitä saa tehtävien ratkaisemisesta 1, 2, 3, 4, 5, 6 tai 7, jos ratkaisee vastaavasti 20, 30, 40, 50, 60, 70 tai 80 prosenttia annetuista tehtävistä.