

TODENNÄKÖISYYSLASKENTA - TEHTÄVÄT

Todennäköisyyyslaskentaa käsitellään Pitkän matematiikan kertauskirjan sivuilla 253–276.

- Klassinen todennäköisyys
- Kombinatoriikka
- Binomitodennäköisyys
- Satunnaismuuttuja, odotusarvo ja jakauma
- Normaalijakauma

- (1) Kolikkoa heitetään kerran. Mikä on todennäköisyys, että tulee kruuna? Mitkä seuraavista väitteistä pitävät paikkansa?
- a) Kolikkoa heitettäessä joka toisella heitolla tulee kruuna.
- b) Kun kolikkoa heitetään kaksi kertaa, niin jommallakummalla heitolla saadaan kruuna.
- c) Kun kolikkoa heitetään sata kertaa, niin tulee viisikymmentä kruunaa.
- d) Kun kolikkoa heitetään satoja kertoja, niin noin 50 prosenttia tuloksista on kruunia.
- (2) Mikä on todennäköisyys, että vuonna 1989 syntynyt henkilö on syntynyt jonkin kuukauden viimeisenä päivänä?
- (3) Pekan pakasta vetämät neljä korttia ovat hertta 5, hertta 6, hertta 7 ja pata 7. Mikä on todennäköisyys, että seuraava kortti on
- a) hertta b) 7 c) 5 tai 6
- (4) Noppaa heitetään kahdesti. Millä todennäköisyydellä
- a) kumpikin silmäluku on 5
- b) ainakin toinen silmäluvuista on 5

- c) kumpikin silmäluvuista on vähintään 5
- d) ainakin toinen silmäluku on vähintään 5?
- e) Mikä on c-kohdan tapahtuman vastatapahtuma? Mikä on vastatapahtuman todennäköisyys?
- f) Mikä on d-kohdan tapahtuman vastatapahtuma? Mikä on vastatapahtuman todennäköisyys?
- (5) Kannattaako lyödä vetoa sen puolesta, että kun pakasta nostetaan kolme korttia, niin ainakin kaksi on samaa maata?
- (6) Heitetään noppaa ja kolikkoa. Klaavasta saa 2 pistettä ja kruunasta 5 pistettä, nopasta silmäluvun osoittaman määrän pisteitä.
- a) Millä todennäköisyydellä nopan silmäluvun ja kolikolla saadun pisteluvun summa on 6?
- b) Millä todennäköisyydellä kolikon pisteluku on nopan silmälukua suurempi?
- (7) s. 268 teht. 620
- (8) s. 268 teht. 623
- (9) s. 268 teht. 624
- (10) Bussi lähtee pääte pysäkiltä puolen tunnin välein ja avaa ovensa 5 minuuttia ennen lähtöä. Henkilö, joka ei tunne aikatauluja, saapuu pysäkille. Millä todennäköisyydellä hän
- a) pääsee heti bussiin
- b) joutuu odottamaan sisälle bussiin pääsemistä enemmän kuin 10 minuuttia?

- (11) Toisen asteen yhtälössä $x^2 + rx + s = 0$ kertoimet r ja s valitaan heittämällä kaksi kertaa tavallista arpakuutiota. Millä todennäköisyydellä yhtälöllä on kaksi erisuurta reaaliuurta?
- (12) Tuomas ostaa arpoja yksitellen. Millä todennäköisyydellä neljäs arpa on ensimmäinen voittoarpa, kun
- a) arpojen lukumäärä on suuri, ja 30 prosenttia arvoista on voittoarpoja
- b) kyseessä on myyjäisten arpajaiset ja jäljellä on 10 arpaa, joista kolme on voittoarpoja?
- (13) s. 264 teht. 615
- (14) Taskulaskimen omistaja on todennut, että hän laskiessaan näppäilee väärin keskimäärin joka 15. näppäilyyn. Millä todennäköisyydellä hän saa oikean tuloksen laskusta, joka vaatii 12 näppäilyä? Oletetaan, että väärän näppäilyyn vaikutus ei korjaudu toisella väärällä näppäilyllä.
- (15) Monopoli-pelissä heitetään kahta noppaa. Jos pelaaja saa samat silmäluvut, niin hän saa heittää uudestaan. Jos vielä kolmannella heittokerralla tulee pari, niin pelaaja joutuu vankilaan. Millä todennäköisyydellä pelaaja joutuu heittovuorollaan tästä syystä vankilaan?
- (16) s. 268 teht. 622
- (17) Artikkelin koevedoksen lukee kolme henkilöä, joista ensimmäinen löytää yksittäisen virheen todennäköisyydellä 0,5, toinen 0,6 ja kolmas 0,7. Artikkelin kirjoittaja on tehnyt viisi virhettä. Millä todennäköisyydellä kaikki virheet löytyvät?
- (18) Kolikkoa heitetään, kunnes tulee ensimmäinen klaava. Millä todennäköisyydellä tarvitaan enemmän kuin neljä heittoa?

- (19) Pelaaja heittää noppaa kolmesti. Millä todennäköisyydellä silmäluvut suurenevät joka heitolla?
- (20) Kuinka monella tavalla voivat asettua jonoon
- a) kolme pientä porsasta
 - b) neljä evankelistaa
 - c) seitsemän veljestä
 - d) Jaakobin 12 poikaa
- (21) Koulun 52 opettajasta täytyy valita yhdeksänjäseninen pesäpallojoukkue, jolle on suunniteltava myös lyöntijärjestys. Kuinka monta (lyöntijärjestyksineen) erilaista joukkuetta voidaan valita?
- (22) Viisi henkilöä kirjoittaa lapulle yhden kokonaisluvusta 1-10. Kukaan ei tiedä toisen kirjoittamia lukuja. Millä todennäköisyydellä
- a) kaikissa lapuissa on eri numero
 - b) ainakin kahdessa lapussa on sama numero?
- (23) s. 268 teht. 621
- (24) s. 264 teht. 616
- (25) Juhlien loppuessa kaikki viisi vierasta valitsevat umpimähkään hatun hyllyltä, jolla ei ole muiden hattuja. Millä todennäköisyydellä joku saa väärän hatun?
- (26) Tiedetään, että salakirjoituksen avaimena on kokonaislukujen 1 – 20 eräs järjestys. Tehokas tietokone pystyy kokeilemaan miljoona järjestystä sekunnissa. Kuinka monta vuotta salakirjoituksen murtaminen saattaa pahimmillaan kestää, vaikka kokeileminen jatkuisi tauotta?

(27) s. 264 teht. 617

(28) Laatikosta, jossa on yksi punainen, kaksi sinistä ja kolme keltaista palloa, otetaan kerralla kaksi palloa. Millä todennäköisyydellä saadut pallot ovat samaa väriä?

(29) Maljassa on kaksi valkoista, kaksi punaista ja kaksi mustaa palloa. Maljasta nostetaan kolme palloa niin, että

a) nostettu pallo laitetaan takaisin ennen seuraavaa nostoa

b) palloa ei panna takaisin.

Millä todennäköisyydellä nostetut pallot ovat erivärisiä?

(30) a) Pakasta jaetaan neljä korttia. Millä todennäköisyydellä kaikki kortit ovat eri maata?

b) Millä todennäköisyydellä korttipakasta nostetut neljä korttia ovat kaikki eri maata, jos kortit aina nostamisen jälkeen pannaan takaisin pakkaan ja pakka sekoitetaan?

(31) Kuinka monta erilaista viiden kortin ”kättä” korttipelissä on mahdollista saada?

(32) Kun halutaan saada tietoa esimerkiksi jonkin joukon mielipiteistä eikä koko joukon tutkiminen ole mahdollista, niin joukosta valitaan pienempi *otos*. Otanta pyritään suorittamaan niin, että otos edustaa koko perusjoukkoa. Usein otanta suoritetaan arpomalla.

a) Kuinka monta erilaista neljän hengen otosta on mahdollista valita 59 kyläläisen joukosta?

b) Kyläläisistä 29 kannattaa kyläkoulun lopettamista. Kuinka moni neljän hengen otoksista koostuu pelkistä koulun lopettamisen kannattajista?

c) Millä todennäköisyydellä arvalla valittu otos koostuu pelkistä koulun lopettamisen kannattajista?

(33) Käytä binomikertoimen muotoa

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

ja laske

a) $\binom{n}{0}$ b) $\binom{n}{1}$ c) $\binom{n}{n-1}$ d) $\binom{n}{n}$

(34) Korissa on 16 pulloa kevytjuomaa ja 9 pulloa tavallista juomaa. Kori on ollut järvessä jäähtymässä ja etiketit ovat irronneet. Korista otetaan umpimähkään 5 pulloa. Laske kahdella tavalla todennäköisyys, että saadaan pelkkää kevytjuomaa. Käytä alkeistapauksina

a) viiden pullon jonoja

b) viiden pullon osajoukkoja.

(35) s. 264 teht. 618

(36) Viisi punaista ja kolme sinistä palloa sisältävästä korista nostetaan umpimähkään kaksi palloa. Laske todennäköisyys, että nostetut pallot ovat

a) molemmat punaisia

b) eriväriset.

(37) s. 270 teht. 625

(38) s. 270 teht. 626

(39) s. 274 teht. 629

- (40) Anssi pelaa uhkapeliä. Heitetään kolikkoa. Jos tulee klaava, Anssi saa 3 tulitikkua. Jos tulee kruuna, Anssi menettää 4 tulitikkua. Olkoon satunnaismuuttuja X Anssin voitto yhdellä kierroksella. Määritä satunnaismuuttujan X
- jakauma
 - odotusarvo.
 - Ennakoi pelin kulku Anssin kannalta. Arvioi tilanne 200 heitokierroksen jälkeen.
- (41) Koulutiellä on kolmet jalankulkuvalot, jotka toimivat toisistaan riippumattomasti ja ovat punaisella 40, 60 ja 70 prosenttia ajasta. Olkoon satunnaismuuttuja X koulumatkalla kohdattavien punaisten valojen lukumäärä. Määritä satunnaismuuttujan X jakauma ja odotusarvo.
- (42) s. 258 teht. 613
- (43) Pelissä heitetään kahta kolikkoa. Jos tulee kaksi klaavaa, Eino saa viisi tulitikkua. Jos tulee yksi klaava, Eino saa kaksi tulitikkua. Jos ei tule yhtään klaavaa, Eino menettää 10 tulitikkua. Olkoon satunnaismuuttuja X Einon voitto yhdellä kierroksella.
- Määritä satunnaismuuttujan X jakauma.
 - Mikä on satunnaismuuttujan X odotusarvo?
 - Ennakoi pelin kulku Einon kannalta.
- (44) Ostetaan viisi arpaa arpajaisissa, joissa arpojen lukumäärä on suuri ja 27 prosenttia arvoista voittaa. Olkoon satunnaismuuttuja X saatujen voittoarpojen lukumäärä. Laske satunnaismuuttujan X odotusarvo ja keskihajonta.
- (45) Satunnaismuuttuja X noudattaa normaalijakaumaa, jonka odotusarvo on 3,0 ja keskihajonta 1,9. Määritä kahden desimaalin tarkkuudella todennäköisyys

a) $P(X \leq 3,7)$

b) $P(X \leq 1,9)$

c) $P(0 \leq X \leq 4,1)$.

(46) Satunnaismuuttuja X noudattaa normaalijakaumaa, jonka odotusarvo on 12,7 ja keskihajonta 3,0. Määritä sellainen satunnaismuuttujan X arvo x , että

a) $P(X \geq x) = 0,12$

b) $P(X \leq x) = 0,18$.

(47) s. 274 teht. 637