Diff.yht. II, harj. 5, 8.–10.12.2009, ratk. (JL), 5 sivua
Huom. *Harjoitustehtävän 4:4 ratkaisuun lisättiin II, lyhyt ratkaisutapa pe 4.12. klo 10.05.*

1. Määritä seuraavien autonomisten systeemien kriittiset pisteet ja niiden laatu (stabiili vai epästabiili):

$$\text{(a)} \quad \begin{cases} \dot{x} = y - 1 \\ \dot{y} = -x + y + 5 \end{cases} \qquad \text{(b)} \quad \begin{cases} \dot{x} = -4x + 2y + 8 \\ \dot{y} = x - 2y + 1 \end{cases}$$

Ratk. **(a)** Olkoot $f(x,y) = y - 1$ ja $g(x,y) = -x + y + 5$ $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$ kyseisen epähomogeenisen lineaarisen systeemin määrittelevät funktiot. Kriittiset pisteet:

$$\begin{cases} f(x,y) = 0 \\ g(x,y) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} y = 1 \\ x = y + 5 \end{cases} \iff \underline{(x,y) = (6,1)}.$$

Kuvauksen $(f,g)\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ lineaarisen osan matriisi on $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$. Määritetään matriisin A ominaisarvot: $\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - \lambda + 1 = 0 \iff \lambda = \frac{1}{2} \pm i\frac{1}{2}\sqrt{3}$. Siis juuret λ ovat kompleksiset liittoluvut, ja niillä on $\mathrm{Re}(\lambda) = \frac{1}{2} > 0$. Täten kriittinen piste $(6,1)$ on <u>epästabiili</u>.

(b) Kriittiset pisteet: $\begin{cases} -4x + 2y + 8 = 0 \\ x - 2y + 1 = 0 \end{cases} \overset{\text{r1+r2}}{\iff} \begin{cases} -3x + 9 = 0 \\ x - 2y + 1 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = 3 \\ y = 2 \end{cases} \iff \underline{(x,y) = (3,2)}.$

Lineaarisen osan matriisin $A = \begin{bmatrix} -4 & 2 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$ ominaisarvot: $\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} -4-\lambda & 2 \\ 1 & -2-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 6\lambda + 6 = 0 \iff \lambda = -3 \pm \sqrt{3}$. Nämä ovat erisuuret ja negatiiviset. Siis kriittinen piste $(3,2)$ on <u>asymptoottisesti stabiili</u>.

2. Autonomisella systeemillä $\begin{cases} \dot{x} = e^{x+y} - \cos x \\ \dot{y} = \cos y + x - 1 \end{cases}$ on $\mathbf{0} = (0,0)$ kriittisenä pisteenä. Määritä tämän laatu.

Ratk. Olkoon $f(x,y) = e^{x+y} - \cos x$ ja $g(x,y) = \cos y + x - 1$. Koska $f(\mathbf{0}) = 1 - 1 = 0$ ja $g(\mathbf{0}) = 1 + 0 - 1 = 0$, niin $\mathbf{0}$ on todellakin kriittinen piste. Kuvauksen $(f,g)\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ derivaatalla pisteessä (x,y) on matriisi

$$A(x,y) = \frac{\partial(f,g)}{\partial(x,y)}(x,y) = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x} f(x,y) & \dfrac{\partial}{\partial y} f(x,y) \\ \dfrac{\partial}{\partial x} g(x,y) & \dfrac{\partial}{\partial y} g(x,y) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{x+y} + \sin x & e^{x+y} \\ 1 & -\sin y \end{bmatrix}.$$

Matriisin $A = A(\mathbf{0}) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ ominaisarvot: $\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - \lambda - 1 = 0 \iff \lambda = \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{5}$.
Nämä ovat erimerkkiset, joten kriittinen piste $\mathbf{0}$ on <u>epästabiili</u>.

3. Määritä seuraavan autonomisen systeemin kriittiset pisteet ja niiden laatu:

$$\begin{cases} \dot{x} = x^2 - y \\ \dot{y} = 2 - x^2 - y^2. \end{cases}$$

Luonnostele lisäksi virtauskuvio, erityisesti lähellä kriittisiä pisteitä. Voiko siitä selvästi nähdä kriittisten pisteiden laadun?

Ratk. Olkoon $f(x,y) = x^2 - y$ ja $g(x,y) = 2 - x^2 - y^2$ $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$. Kriittiset pisteet:

$$\begin{cases} f(x,y) = 0 \\ g(x,y) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} y = x^2 \\ x^2 + y^2 = 2 \end{cases} \iff \begin{cases} x^2 = y \\ y^2 + y - 2 = (y-1)(y+2) = 0 \end{cases}$$
$$\iff x^2 = y = 1 \quad \text{tai} \quad x^2 = y = -2 \iff \underline{(x,y) = (-1,1) \text{ tai } (x,y) = (1,1).}$$

Kuvauksen (f, g) derivaatan matriisi on $A(x, y) = \begin{bmatrix} 2x & -1 \\ -2x & -2y \end{bmatrix}$.

Matriisien $A(-1, 1) = \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}$ ja $A(1, 1) = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -2 & -2 \end{bmatrix}$ ominaisarvot:

$$\det(A(-1,1) - \lambda I) = \begin{vmatrix} -2-\lambda & -1 \\ 2 & -2-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 4\lambda + 6 = 0 \iff \lambda = -2 \pm i\sqrt{2};$$
$$\det(A(1,1) - \lambda I) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 \\ -2 & -2-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 6 = 0 \iff \lambda = \pm\sqrt{6}.$$

Kriittinen piste $(-1, 1)$ on asymptoottisesti stabiili, sillä $\mathrm{Re}(-2 \pm i\sqrt{2}) = -2 < 0$; koska lisäksi $\mathrm{Im}(-2 \pm i\sqrt{2}) = \pm\sqrt{2} \neq 0$, niin radat lähestyvät pistettä $(-1, 1)$ spiraalimaisesti.
Kriittinen piste $(1, 1)$ on epästabiili, sillä ominaisarvot $\pm\sqrt{6}$ ovat erimerkkiset: satulapiste. Virtauskuvion piirtämisessä on hyötyä tiedosta, että ominaisarvoihin $\lambda = \sqrt{6}$ ja $\lambda = -\sqrt{6}$ liittyy ominaisvektorit $(1, 2 - \sqrt{6}) = (1, -0,45)$ ja $(1, 2 + \sqrt{6}) = (1, 4,45)$.

Käyrät $f(x, y) = 0$ ja $g(x, y) = 0$ (systeemin eräät **isokliinit**) ovat vastaavasti paraabeli $y = x^2$ ja ympyrä $x^2 + y^2 = 2$, jotka nyt leikkaavat kriittisissä pisteissä.
Jaetaan kriittisten pisteiden joukon komplementti $\mathbb{R}^2 \setminus \{(-1, 1), (1, 1)\}$ erilliseksi yhdisteeksi alueista (eli avoimista yhtenäisistä joukoista)

$$G_1 = \{(x, y) \mid y > x^2, x^2 + y^2 > 2\},\ G_2 = \{(x, y) \mid y > x^2, x^2 + y^2 < 2 \mid\},$$
$$G_3 = \{(x, y) \mid y < x^2, x^2 + y^2 < 2\},\ G_4 = \{(x, y) \mid y < x^2, x^2 + y^2 > 2 \mid\},$$

ja kaarista tai kaarien yhdisteistä

$$K_1 = \{(x, y) \mid y = x^2, x^2 + y^2 > 2\},\ K_2 = \{(x, y) \mid y > x^2, x^2 + y^2 = 2\},$$
$$K_3 = \{(x, y) \mid y = x^2, x^2 + y^2 < 2\},\ K_4 = \{(x, y) \mid y < x^2, x^2 + y^2 = 2\}.$$

Virtauksella on kriittisten pisteiden joukon ulkopuolisessa pisteessä (x, y) suuntana vektori $(f(x, y), g(x, y))$. Huomataan, että $f(x, y) > 0 \iff y < x^2$ eli paraabelin alapuolella ja että $g(x, y) > 0 \iff x^2 + y^2 < 2$ eli ympyrän sisäpuolella.
Joukoissa $f(x, y) = 0$ ja $g(x, y) = 0$ suunnat ovat tarkasti pystysuoraan ylös tai alas tai vaakasuoraan vasemmalle tai oikealle seuraavasti; on myös ilmoitettu piste, johon nuoli virtauskuviossa kannattaa piirtää:

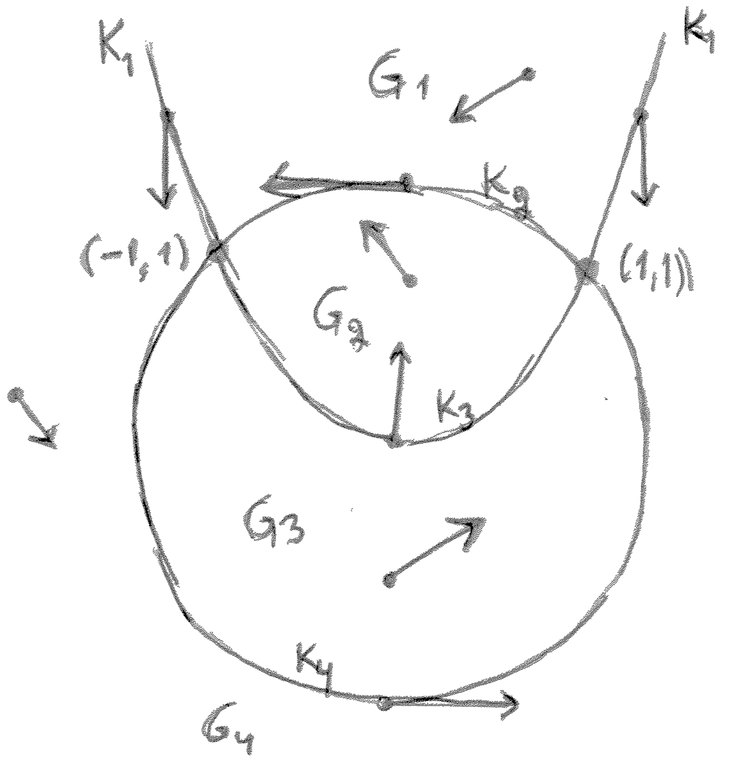
$$K_1 : \downarrow\ (\pm\sqrt{2}, 2);\quad K_2 : \leftarrow\ (0, \sqrt{2});\quad K_3 : \uparrow\ (0, 0);\quad K_4 : \rightarrow\ (0, -\sqrt{2}).$$

Koska f ja g ovat jatkuvia eivätkä siis voi vaihtaa merkkiään alueessa G_j millään j, niin näistä nuolista joukoissa K_j $(1 \leq j \leq 4)$ voidaan päätellä seuraavat suunnat (mutta esim. nuoli $\nearrow$ tarkoittaa vain, että oikealle ylös viittaamatta mihinkään tiettyyn kulmaan):

$$G_1 : \swarrow;\quad G_2 : \nwarrow;\quad G_3 : \nearrow;\quad G_4 : \searrow.$$

Kääntäen näistä nuolista alueissa G_j $(1 \leq j \leq 4)$ voidaan päätellä nuolet joukoissa K_j, koska jatkuvuuden nojalla f ja g voivat vaihtaa merkkinsä vain arvon 0 kautta.
Kuviossa 1 on esitetty joukot K_j ja G_j yllä mainittuine nuolineen. **Kuviossa 2** on hahmoteltu ratojakin erityisesti lähellä kriittisiä pisteitä niin, että kriittisten pisteiden laatu näkyy.

Kuvio 1 ja Kuvio 2 tehtävään 3



4. Epälineaarinen 2. kl. differentiaaliyhtälö

(1) $$\ddot{x}(t) + (1 + x(t)^2)\dot{x}(t) + sx(t) = 0$$

riippuu parametristä $s \in \mathbb{R}$. Muunna se kahden yhtälön 1. kl. systeemiksi ja tutki origon $\mathbf{0}$ stabiilisuutta tässä (autonomisessa) systeemissä, kun

(a) $s = 1$. (b) $s = 1/4$. (c) $s = -1$.

Ratk. Merkitään $y_1 = x$ ja $y_2 = \dot{x}$, jolloin

$$(1) \iff \begin{cases} \dot{y}_1 = y_2 \\ \dot{y}_2 = -(1 + y_1^2)y_2 - sy_1. \end{cases}$$

Merkitään $f(y_1, y_2) = y_2$ ja $g(y_1, y_2) = -(1+y_1^2)y_2 - sy_1$, kun $(y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$. Tällöin $f(0,0) = 0$ ja $g(0,0) = 0$, joten $\mathbf{0} = (0,0) \in \mathbb{R}^2$ on todellakin saadun autonomisen systeemin kriittinen piste.

Kuvauksen (f, g) derivaatalla pisteessä (y_1, y_2) on matriisi $A(y_1, y_2) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2y_1y_2 - s & -(1+y_1^2) \end{bmatrix}$. Matriisin $A = A(\mathbf{0}) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -s & -1 \end{bmatrix}$ karakteristinen yhtälö on

(2) $$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -s & -1-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + \lambda + s = 0.$$

Siis $\det A = s$. Tapauksissa (a)–(c) on täten $\det A \neq 0$.

(a) $s = 1$: Nyt (2) $\iff \lambda^2 + \lambda + 1 = 0 \iff \lambda = -\frac{1}{2} \pm i\frac{1}{2}\sqrt{3}$. Täten $\mathbf{0}$ on asymptoottisesti stabiili kriittinen piste.

(b) $s = 1/4$: Nyt (2) $\iff \lambda^2 + \lambda + 1/4 = (\lambda + 1/2)^2 = 0 \iff \lambda = -1/2$. Siis A:n ominaisarvo $-1/2$ on kaksinkertainen negatiivinen juuri. Täten kriittinen piste $\mathbf{0}$ on asymptoottisesti stabiili.

(c) $s = -1$. Nyt (2) $\iff \lambda^2 + \lambda - 1 = 0 \iff \lambda = -1/2 \pm (1/2)\sqrt{5}$. Koska juuret ovat erimerkkiset, on kriittinen piste $\mathbf{0}$ epästabiili.

Huom. Se, että $\mathbf{0}$ on kriittinen piste, tarkoittaa skalaariyhtälölle (1), että sillä on triviaaliratkaisu $x(t) \equiv 0$, jolle on myös $\dot{x}(t) \equiv 0$. Stabiilius tarkoittaa (1):lle, että $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0$, jolla $|x(0)| < \delta \,\&\, |\dot{x}(0)| < \delta \implies |x(t)| < \varepsilon \,\&\, |\dot{x}(t)| < \varepsilon\ \forall t \geq 0$. Asymptoottinen stabiilius tarkoittaa (1):lle, että tämän lisäksi $\exists \eta > 0$, jolla $|x(0)| < \eta \,\&\, |\dot{x}(0)| < \eta \implies x(t) \to 0 \,\&\, \dot{x}(t) \to 0$, kun $t \to \infty$.

5. Määritä seuraavan autonomisen systeemin kriittiset pisteet ja radat:

$$\begin{cases} \dot{x} = (x+1)(y-2) \\ \dot{y} = x^2 - x - 2. \end{cases}$$

Mitä Poincarén lause kertoo kriittisten pisteiden laadusta? Luonnostele lisäksi virtauskuvio, lähinnä ratoja virtaussuuntineen. Kertooko se jotain kriittisten pisteiden laadusta?

Ratk. Olkoon $f(x,y) = (x+1)(y-2)$ ja $g(x,y) = x^2 - x - 2 = (x+1)(x-2)$, kun $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Kriittiset pisteet:

$$\begin{cases} f(x,y) = 0 \\ g(x,y) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = -1 \text{ tai } y = 2 \\ x = -1 \text{ tai } x = 2 \end{cases} \iff (x,y) = \underline{(-1, s)} \text{ jollain } s \in \mathbb{R} \text{ tai } (x,y) = \underline{(2,2)}.$$

Suoran $x = -1$ jokainen piste on kriittinen piste; kyseessä on *kriittinen suora*.

Määritetään radat kriittisten pisteiden joukon ulkopuolella. Radat joukon $f(x,y) = 0$ eli suorien $x = -1$ ja $y = 2$ ulkopuolella saadaan separoituvasta differentiaaliyhtälöstä:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\dot{y}}{\dot{x}} = \frac{g(x,y)}{f(x,y)} = \frac{(x+1)(x-2)}{(x+1)(y-2)} = \frac{x-2}{y-2} \iff \int (y-2)\,dy = \int (x-2)\,dx$$

$$\iff \tfrac{1}{2}(y-2)^2 = \tfrac{1}{2}(x-2)^2 + C_0 \ (C_0 \in \mathbb{R}) \overset{C=-2C_0}{\iff} \underline{(x-2)^2 - (y-2)^2 = C} \ (C \in \mathbb{R}).$$

Joukon $g(x,y)=0$ eli suorien $x=-1$ ja $x=2$ ulkopuolella saadaan radoille separoituva differentiaaliyhtälö $dx/dy = f(x,y)/g(x,y) = (y-2)/(x-2)$, jolloin tulee sama yhtälö $\int (y-2)\,dy = \int (x-2)\,dx$ ja sama lopullinen käyrä kuin yllä. Näin saatiin radoista selvitettyä myös ehdon $f(x,y) \neq 0$ poistamat pisteet.

Jos $C \neq 0$, tämä käyrä on C:n merkin mukaan jompikumpi hyperbeleistä

$$\frac{(x-2)^2}{(\sqrt{|C|})^2} - \frac{(y-2)^2}{(\sqrt{|C|})^2} = \pm 1;$$

jos taas $C=0$, tämä käyrä on näiden hyperbeliparvien yhteiset aymptoottisuorat

$$(y-2) = \pm(x-2).$$

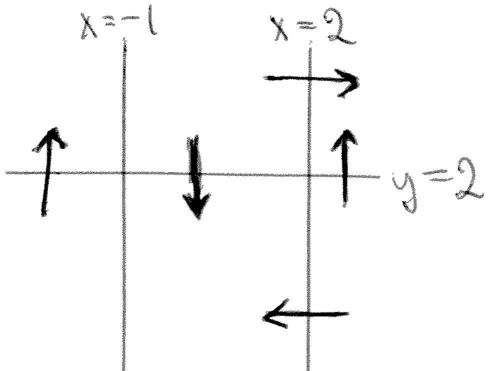
Itse radat ovat kriittisten pisteiden näiden hyperbelien haaroista ja niiden asymptooteista erottamat yhtenäiset avoimet kaaret. Lisäksi jokaiseen kriittiseen pisteeseen liittyy pistemäinen rata.

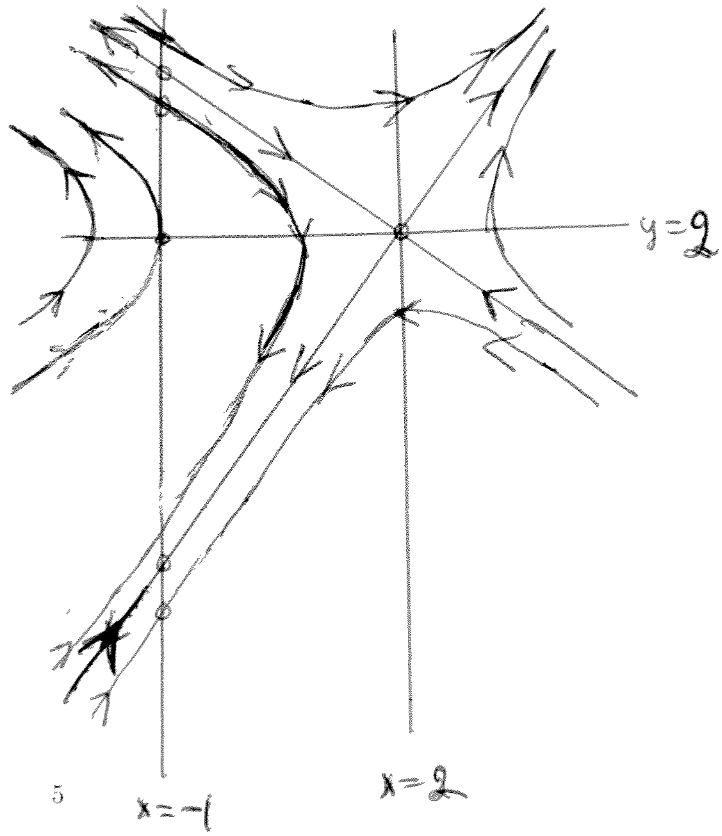
Suoralla $y=2$ on $f(x,y)=0$ (eli virtauksella alustavasti suunta $|$) ja $g(x,y)=(x+1)(x-2)>0$ (eli virtauksella suunta $\uparrow$), jos $x<-1$ tai $x>2$, ja $g(x,y)<0$ (eli suunta $\downarrow$), jos $-1<x<2$. Suoralla $x=2$ on $g(x,y)=0$ (eli alustavasti suunta $-$) ja $f(x,y)=3(y-2)>0$ (eli suunta $\rightarrow$), jos $y>2$, ja $f(x,y)<0$ (eli suunta $\leftarrow$), jos $y<2$. Saatavasta viidestä nuolesta (**Kuvio 3**) voidaan ratojen kulkusuunta määrittää (**Kuvio 4**).

Kuvauksen (f,g) derivaatalla pisteessä $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ on matriisi $A(x,y) = \begin{bmatrix} y-2 & x+1 \\ 2x-1 & 0 \end{bmatrix}$.

Nyt $A(2,2) = \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$, joten $\det(A(2,2)-\lambda I) = \begin{vmatrix} -\lambda & 3 \\ 3 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 9 = 0 \iff \lambda = \pm 3$; siis matriisin $A(2,2)$ ominaisarvot ovat erimerkkiset, jolloin Poincarén lauseen nojalla kriittinen piste $(2,2)$ on epästabiili. Tämä nähdään myös Kuviosta 4.

Kun $s\in\mathbb{R}$, niin $A(-1,s) = \begin{bmatrix} s-2 & 0 \\ -3 & 0 \end{bmatrix}$ on alakolmiomatriisi, joten sen ominaisarvot ovat lävistäjän alkiot $\lambda_1 = s-2$ ja $\lambda_2 = 0$; tällöin on myös $\det A(-1,s) = 0$. Siis Poincarén lause ei tähän tapaukseen sovellu. Mutta Kuviosta 4 nähdään, että kriittinen piste $(x,y)=(-1,s)$ on epästabiili, jos $s \geq 2$, ja stabiili, mutta ei asymptoottisesti stabiili, jos $s<2$.





Kuviot 3 ja 4