Diff.yht. II, harj. 4, 1.–3.12.2009, ratk. [4. tehtävän II ratk. lisätty pe 4.12.] (JL), 6 sivua

1. Tarkastellaan vakiokertoimista homogeenisysteemiä $\dot{\mathbf{x}}(t) = A\mathbf{x}(t)$, jossa $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ja $n = 2$ tai $n = 3$. Määritä sen kriittisen pisteen $\mathbf{0} \in \mathbb{R}^n$ laatu (stabiili vai epästabiili), kun

$$\textbf{(a)} \quad A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \textbf{(b)} \quad A = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ -8 & 14 & -7 \end{bmatrix}, \quad \textbf{(c)} \quad A = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 8 & 1 \end{bmatrix}.$$

Ratk. (a) Etsitään A:n ominaisarvot: $\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} -\lambda & -1 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 1 = 0 \iff \lambda = \pm i$. Siis $\operatorname{Re}\lambda = 0$, joten yksin tämän nojalla systeemin kriittisen pisteen $\mathbf{0} \in \mathbb{R}^2$ laatua (stabiili/epästabiili) ei vielä voi ratkaista ($\mathbf{0}$ on kriittinen piste, sillä $A\mathbf{0} = \mathbf{0}$). Koska kuitenkin juuret $\lambda = \pm i$ ovat yksinkertaiset, niin perusjärjestelmän funktioihin ei tule polynomitekijöitä, joten kriittinen piste $\mathbf{0}$ on <u>stabiili</u>.
Mutta tutkitaan kysymystä suoraankin, koska tilannehan on uusi edellisiin harjoituksiin verrattuna. Seuraavilla laskuilla on käyttönsä myös tehtävässä 2, jossa on sama matriisi A.

Etsitään kompleksista ominaisarvoa $\lambda = i \in \mathbb{C}$ vastaavat kompleksiset ominaisvektorit $\mathbf{u} = (u_1, u_2) \in \mathbb{C}^2$: $(A - iI)\mathbf{u} = \mathbf{0} \iff \begin{cases} -iu_1 - u_2 = 0 \\ u_1 - iu_2 = 0 \end{cases} \iff u_1 = iu_2 \iff \mathbf{u} = c\begin{bmatrix} i \\ 1 \end{bmatrix}$ ($c \in \mathbb{C}$). Valitaan $c = 1$, jolloin saadaan systeemille kompleksinen ratkaisu $\mathbf{x}(t) = e^{it}\begin{bmatrix} i \\ 1 \end{bmatrix} = (\cos t + i\sin t)\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} + i\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right)$, josta saadaan reaalisista ratkaisuista $\mathbf{x}_1(t) = \operatorname{Re}\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\cos t - \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}\sin t = \begin{bmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{bmatrix}$ ja $\mathbf{x}_2(t) = \operatorname{Im}\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}\cos t + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\sin t = \begin{bmatrix} \cos t \\ \sin t \end{bmatrix}$ koostuva perusjärjestelmä $\mathbb{R}$:ssä. Tällöin $X(t) = [\,\mathbf{x}_2(t) \quad \mathbf{x}_1(t)\,] = \begin{bmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{bmatrix}$ $\forall t \in \mathbb{R}$ on sellainen systeemin perusmatriisi, jolla $X(0) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I$. Olkoon $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^2$. Tällöin $\mathbf{x}(t) = X(t)\mathbf{x}_0$ $\forall t \in \mathbb{R}$ on se ratkaisu, jolla $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$. Siis $\mathbf{x}(t)$ saadaan $\mathbf{x}_0$:sta kiertämällä kulman t verran origon $\mathbf{0}$ ympäri. Tällöin $|\mathbf{x}(t)| = |\mathbf{x}_0|$ kaikilla $t \in \mathbb{R}$. Täten, jos $\varepsilon > 0$ on mielivaltainen, niin on olemassa sellainen $\delta > 0$ (nimittäin $\delta = \varepsilon$ käy), jolla ehdosta $|\mathbf{x}_0 - \mathbf{0}| < \delta$ seuraa, että $|\mathbf{x}(t) - \mathbf{0}| < \varepsilon$ kaikilla $t \geq 0$. Näin ollen kriittinen piste $\mathbf{0}$ on <u>stabiili</u>. (Se ei kuitenkaan ole eksponentiaalisesti stabiili; vrt. harjoitustehtävän 3:5 ratkaisu.)

(b) $\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} -\lambda & -1 & 0 \\ 0 & -\lambda & -1 \\ -8 & 14 & -7-\lambda \end{vmatrix} \overset{\text{r1}}{=} -\lambda\begin{vmatrix} -\lambda & -1 \\ 14 & -7-\lambda \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ -8 & -7-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda(\lambda^2 + 7\lambda + 14) - 8 = -(\lambda^3 + 7\lambda^2 + 14\lambda + 8) = -(\lambda + 1)(\lambda + 2)(\lambda + 4) = 0 \iff \lambda \in \{-1, -2, -4\}$. Siis kolme erisuurta reaalista ominaisarvoa, ja ne kaikki ovat negatiivisia. Täten $\mathbf{0}$ on <u>stabiili</u>.
(c) $\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} -1-\lambda & 1 \\ 8 & 1-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 9 = 0 \iff \lambda = \pm 3$. Siis kaksi erisuurta reaalista ominaisarvoa, ja niiden joukossa on posiivinen. Täten $\mathbf{0}$ on <u>epästabiili</u>. (Koska ominaisarvot ovat erimerkkiset, on $\mathbf{0}$ satulapiste.)

2. Ratkaise lineaarinen systeemi

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = A\mathbf{x}(t) + \mathbf{f}(t), \quad A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{f}(t) = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix},$$

käyttäen varioimiskeinoa. Mikä suora yrite johtaisi tulokseen helpommin?
Ratk. Tehtävän 1(a) ratkaisusta näkyy, että vastaavan homogeeniyhtälön $\dot{\mathbf{x}}(t) = A\mathbf{x}(t)$ yleinen ratkaisu on $\mathbf{x}(t) = X(t)\mathbf{c}$ ($\mathbf{c} \in \mathbb{R}^2$), jossa $X(t) = \begin{bmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{bmatrix}$ on yhtälön perusmatriisi (kiertomatiisi). Täyden

yhtälön yksittäisen ratkaisun löytämiseksi käytetään varioimiskeinoa ja kirjoitetaan $\mathbf{x}(t) = X(t)\mathbf{c}(t)$; nyt

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \dot{X}(t)\mathbf{c}(t) + X(t)\dot{\mathbf{c}}(t) = AX(t)\mathbf{c}(t) + X(t)\dot{\mathbf{c}}(t) = A\mathbf{x}(t) + X(t)\dot{\mathbf{c}}(t) = A\mathbf{x}(t) + \mathbf{f}(t) \iff X(t)\dot{\mathbf{c}}(t) = \mathbf{f}(t)$$
$$\iff \dot{\mathbf{c}}(t) = X(t)^{-1}\mathbf{f}(t) = \begin{bmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\cos t + \sin t \\ -2\sin t + \cos t \end{bmatrix}$$
$$\Longleftarrow \mathbf{c}(t) = \int \begin{bmatrix} 2\cos t + \sin t \\ -2\sin t + \cos t \end{bmatrix} dt = \begin{bmatrix} 2\sin t - \cos t \\ 2\cos t + \sin t \end{bmatrix}.$$

Näin saadaan yksittäisratkaisu

$$\mathbf{x}(t) = X(t)\mathbf{c}(t) = \begin{bmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2\sin t - \cos t \\ 2\cos t + \sin t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\cos t \sin t - \cos^2 t - 2\sin t \cos t - \sin^2 t \\ 2\sin^2 t - \sin t \cos t + 2\cos^2 t + \cos t \sin t \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} -(\cos^2 t + \sin^2 t) \\ 2(\sin^2 t + \cos^2 t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Nopeammin olisi toiminut yrite, joka on samaa muotoa kuin yhtälön oikea puoli, eli siis vakiofunktioyrite $\mathbf{x}(t) = [a \quad b]^T$ $(a, b \in \mathbb{R})$:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = A\mathbf{x}(t) + \mathbf{f}(t) \iff \mathbf{0} = A\mathbf{x}(t) + \mathbf{f}(t) \iff \mathbf{x}(t) = A^{-1}(-\mathbf{f}(t)) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Yleiseksi ratkaisuksi saadaan $\mathbf{x}(t) = X(t)\mathbf{c} + \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix} = \underline{c_1 \begin{bmatrix} \cos t \\ \sin t \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}}$ $\forall t \in \mathbb{R}$ $(c_1, c_2 \in \mathbb{R})$.

3. Ratkaise lineaarinen systeemi

$$(1) \qquad \dot{\mathbf{x}}(t) = A\mathbf{x}(t) + \mathbf{f}(t), \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{f}(t) = \begin{bmatrix} -\cos t \\ -\sin t \end{bmatrix}.$$

Ohje. Suora yrite. Se johtaa 4×4-kokoiseen lineaariseen yhtälöryhmään.

Ratk. Ratkaistaan ensin täydelleen homogeeninen systeemi $\dot{\mathbf{x}}(t) = A\mathbf{x}(t)$. Karakteristisen yhtälön

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 4 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)^2 - 4 = (1-\lambda+2)(1-\lambda-2) = (\lambda-3)(\lambda+1) = 0$$

juuret ovat erisuuret reaaliluvut $\lambda = 3$ ja $\lambda = -1$. Etsitään vastaavat ominaisvektorit $\mathbf{u} = (u_1, u_2) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{\mathbf{0}\}$:

$$(A - 3I)\mathbf{u} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 4 & -2 \end{bmatrix} \mathbf{u} = \mathbf{0} \iff u_2 = 2u_1 \iff \mathbf{u} = s \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \quad (s \in \mathbb{R} \setminus 0);$$
$$(A + I)\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} \mathbf{u} = \mathbf{0} \iff u_2 = -2u_1 \iff \mathbf{u} = s \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} \quad (s \in \mathbb{R} \setminus 0).$$

Täten homogeenisen systeemin yleinen ratkaisu on $\mathbf{x}(t) = C_1 e^{3t} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} + C_2 e^{-t} \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$.

Huomataan, että $\mathbf{f}(t) = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix} \cos t + \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} \sin t$ ei sisälly homogeenisen systeemin ratkaisuihin. Tehdään siksi (1):n yksittäisratkaisun löytämiseksi yrite $\mathbf{x}(t) = \mathbf{a}\cos t + \mathbf{b}\sin t$ $\forall t \in \mathbb{R}$ määritettävin kertoimin $\mathbf{a} = (a_1, a_2) \in \mathbb{R}^2$ ja $\mathbf{b} = (b_1, b_2) \in \mathbb{R}^2$. Yritteelle on

$$(1) \iff -\mathbf{a}\sin t + \mathbf{b}\cos t = A\mathbf{a}\cos t + A\mathbf{b}\sin t + \mathbf{f}(t)$$
$$\iff -\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} \sin t + \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} \cos t = \begin{bmatrix} a_1 + a_2 \\ 4a_1 + a_2 \end{bmatrix} \cos t + \begin{bmatrix} b_1 + b_2 \\ 4b_1 + b_2 \end{bmatrix} \sin t + \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix} \cos t + \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} \sin t$$
$$\iff \begin{cases} -a_1 = b_1 + b_2 & (\alpha) \\ -a_2 = 4b_1 + b_2 - 1 & (\beta) \\ b_1 = a_1 + a_2 - 1 & (\gamma) \\ b_2 = 4a_1 + a_2 & (\delta) \end{cases}.$$

Nyt (γ) antaa $a_1+a_2=b_1+1$ ja $(\beta)-(\alpha)$ antaa $a_1-a_2=3b_1-1$; näistä yhteenlaskemalla ja vähentämällä saadaan $2a_1=4b_1$ ja $2a_2=-2b_1+2$ eli $a_1=2b_1$ ja $a_2=-b_1+1$, jolloin kääntäen (γ) toteutuu. Tällöin $(\delta)\iff b_2=8b_1-b_1+1=7b_1+1$ ja $(\alpha)\iff -2b_1=b_1+7b_1+1\iff 10b_1=-1\iff b_1=-1/10$, jolloin $a_1=-2/10$, $a_2=11/10$ ja $b_2=3/10$; nyt kääntäen myös (β) toteutuu. Täten yritteelle on

$$(1)\iff\begin{cases}a_1=-2/10\\a_2=11/10\\b_1=-1/10\\b_2=3/10\end{cases}\iff \mathbf{x}(t)=\frac{1}{10}\begin{bmatrix}-2\\11\end{bmatrix}\cos t+\frac{1}{10}\begin{bmatrix}-1\\3\end{bmatrix}\sin t\quad\forall t\in\mathbb{R}.$$

Siis (1):n yleinen ratkaisu on $\mathbf{x}(t)=\underline{C_1e^{3t}\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}+C_2e^{-t}\begin{bmatrix}1\\-2\end{bmatrix}+\frac{1}{10}\begin{bmatrix}-2\\11\end{bmatrix}\cos t+\frac{1}{10}\begin{bmatrix}-1\\3\end{bmatrix}\sin t}$ $\forall t\in\mathbb{R}$ $(C_1,C_2\in\mathbb{R})$.

4. Kahden kuulan ja kolmen jousen värähtelijässä päädyttiin 2. kl. homogeeniseen, vakiokertoimiseen systeemiin

$$(1)\qquad\begin{cases}m\ddot{x}_1+2kx_1-kx_2=0\\m\ddot{x}_2-kx_1+2kx_2=0,\end{cases}$$

jossa $m,k>0$ ovat vakioita. Ratkaise systeemi, mielellään matriisikeinolla.

I ratk. (lyhyempi II ratk. perässä) Merkitään $a=k/m$. Määritellään $z_1=x_1$, $z_2=\dot{x}_1$, $z_3=x_2$ ja $z_4=\dot{x}_2$ sekä $\mathbf{z}=(z_1,z_2,z_3,z_4)$. Tällöin

$$(1)\iff\begin{cases}\dot{z}_1=z_2\\\dot{z}_2=-2az_1+az_3\\\dot{z}_3=z_4\\\dot{z}_4=az_1-2az_3\end{cases}\iff\dot{\mathbf{z}}=A\mathbf{z},\quad\text{jossa}\quad A=\begin{bmatrix}0&1&0&0\\-2a&0&a&0\\0&0&0&1\\a&0&-2a&0\end{bmatrix}.$$

Nyt

$$\det(A-\lambda I)=\begin{vmatrix}-\lambda&1&0&0\\-2a&-\lambda&a&0\\0&0&-\lambda&1\\a&0&-2a&-\lambda\end{vmatrix}\overset{\text{r1}}{=}(-\lambda)\begin{vmatrix}-\lambda&a&0\\0&-\lambda&1\\0&-2a&-\lambda\end{vmatrix}-\begin{vmatrix}-2a&a&0\\0&-\lambda&1\\a&-2a&-\lambda\end{vmatrix}$$

$$\underset{\text{r1+2r3}}{\overset{\text{s1}}{=}}(-\lambda)(-\lambda)\begin{vmatrix}-\lambda&1\\-2a&-\lambda\end{vmatrix}-\begin{vmatrix}0&-3a&-2\lambda\\0&-\lambda&1\\a&-2a&-\lambda\end{vmatrix}\overset{\text{s1}}{=}\lambda^2(\lambda^2+2a)-a\begin{vmatrix}-3a&-2\lambda\\-\lambda&1\end{vmatrix}$$

$$=\lambda^2(\lambda^2+2a)-a(-3a-2\lambda^2)=\lambda^4+4a\lambda^2+3a^2=(\lambda^2+a)(\lambda^2+3a)=0$$

$$\iff\lambda^2\in\{-a,-3a\}\iff\lambda\in\{\pm i\omega,\pm i\eta\},\quad\text{kun merkitään }\omega=\sqrt{a}\text{ ja }\eta=\sqrt{3a}.$$

Etsitään ominaisarvoihin $\lambda=i\omega\in\mathbb{C}$ ja $\lambda=i\eta\in\mathbb{C}$ liittyvät ominaisvektorit $\mathbf{u}=(u_1,u_2,u_3,u_4)\in\mathbb{C}^4\setminus\{\mathbf{0}\}$:

$$(A-i\omega I)\mathbf{u}=\begin{bmatrix}-i\omega&1&0&0\\-2\omega^2&-i\omega&\omega^2&0\\0&0&-i\omega&1\\\omega^2&0&-2\omega^2&-i\omega\end{bmatrix}\mathbf{u}=\mathbf{0}\iff\begin{cases}u_2=i\omega u_1\\-2\omega^2u_1+\omega^2u_1+\omega^2u_3=0\\u_4=i\omega u_3\\\omega^2u_1-2\omega^2u_3+\omega^2u_3=0\end{cases}\iff\begin{cases}u_2=i\omega u_1\\u_3=u_1\\u_4=i\omega u_1\\u_3=u_1\end{cases}$$

$$\iff\mathbf{u}=s(1,i\omega,1,i\omega)\quad(s\in\mathbb{C}\setminus\{0\});\quad\text{valitaan }\mathbf{u}_1=(1,i\omega,1,i\omega);$$

$$(A-i\eta I)\mathbf{u}=\begin{bmatrix}-i\eta&1&0&0\\-2\eta^2/3&-i\eta&\eta^2/3&0\\0&0&-i\eta&1\\\eta^2/3&0&-2\eta^2/3&-i\eta\end{bmatrix}\mathbf{u}=\mathbf{0}\iff\begin{cases}u_2=i\eta u_1\\-(2\eta^2/3)u_1+\eta^2u_1+(\eta^2/3)u_3=0\\u_4=i\eta u_3\\(\eta^2/3)u_1-(2\eta^2/3)u_3+\eta^2u_3=0\end{cases}$$

$$\iff\begin{cases}u_2=i\eta u_1\\u_3=-u_1\\u_4=-i\eta u_1\\u_3=-u_1\end{cases}\iff\mathbf{u}=s(1,i\eta,-1,-i\eta)\quad(s\in\mathbb{C}\setminus\{0\});\quad\text{valitaan }\mathbf{u}_2=(1,i\eta,-1,-i\eta).$$

Saadaan kompleksiset ratkaisut

$$\begin{aligned} e^{i\omega t}\mathbf{u}_1 &= (\cos\omega t + i\sin\omega t)((1,0,1,0) + i\omega(0,1,0,1)), \\ e^{i\eta t}\mathbf{u}_2 &= (\cos\eta t + i\sin\eta t)((1,0,-1,0) + i\eta(0,1,0,-1)), \end{aligned}$$

joiden reaali-ja imaginääriosista tulee seuraava perusjärjestelmä $\mathbb{R}$:ssä:

$$\begin{aligned} \mathbf{z}_1(t) &= (1,0,1,0)\cos\omega t - (0,1,0,1)\omega\sin\omega t, \\ \mathbf{z}_2(t) &= (0,1,0,1)\omega\cos\omega t + (1,0,1,0)\sin\omega t, \\ \mathbf{z}_3(t) &= (1,0,-1,0)\cos\eta t - (0,1,0,-1)\eta\sin\eta t, \\ \mathbf{z}_4(t) &= (0,1,0,-1)\eta\cos\eta t + (1,0,-1,0)\sin\eta t. \end{aligned}$$

Yleinen ratkaisu on siis

$$\mathbf{z}(t) = C_1\begin{bmatrix}\cos\omega t\\ -\omega\sin\omega t\\ \cos\omega t\\ -\omega\sin\omega t\end{bmatrix} + C_2\begin{bmatrix}\sin\omega t\\ \omega\cos\omega t\\ \sin\omega t\\ \omega\cos\omega t\end{bmatrix} + C_3\begin{bmatrix}\cos\eta t\\ -\eta\sin\eta t\\ -\cos\eta t\\ \eta\sin\eta t\end{bmatrix} + C_4\begin{bmatrix}\sin\eta t\\ \eta\cos\eta t\\ -\sin\eta t\\ -\eta\cos\eta t\end{bmatrix} \quad \forall t\in\mathbb{R} \quad (C_1,C_2,C_3,C_4\in\mathbb{R}).$$

Täten alkuperäisen yhtälön yleinen ratkaisu $\mathbf{x}(t) = (x_1(t), x_2(t)) = (z_1(t), z_3(t))$ on

$$\mathbf{x}(t) = C_1\begin{bmatrix}\cos\omega t\\ \cos\omega t\end{bmatrix} + C_2\begin{bmatrix}\sin\omega t\\ \sin\omega t\end{bmatrix} + C_3\begin{bmatrix}\cos\eta t\\ -\cos\eta t\end{bmatrix} + C_4\begin{bmatrix}\sin\eta t\\ -\sin\eta t\end{bmatrix} \quad \forall t\in\mathbb{R} \quad (C_1,C_2,C_3,C_4\in\mathbb{R}),$$

jossa siis $\omega = \sqrt{k/m}$ ja $\eta = \sqrt{3k/m}$. (Ratkaisu *ei* yleensä ole jaksollinen, koska $\eta/\omega = \sqrt{3}\notin\mathbb{Q}$.)

II ratk. Ylläoleva I ratkaisu esitettiin kaikissa JL:n ryhmissä, mutta allaoleva II ratkaisu vain joissakin, ja silloinkin turhan tiiviisti ja vähälle huomiolle jääden.

Olkoon jälleen $a = k/m > 0$. Tällöin

$$(1) \iff \begin{cases} \ddot{x}_1 = -2ax_1 + ax_2 \\ \ddot{x}_2 = ax_1 - 2ax_2 \end{cases} \iff \ddot{\mathbf{x}} = B\mathbf{x}, \quad \text{jossa} \quad B = \begin{bmatrix}-2a & a\\ a & -2a\end{bmatrix}, \ \mathbf{x} = (x_1, x_2).$$

Kuten I ratkaisussa huomattiin, 2. kl. vakiokertoiminen lineaarinen homogeeninen systeemi $\ddot{\mathbf{x}} = B\mathbf{x}$ on yhtäpitävä 1. kl. vakiokertoimisen lineaarisen homogeenisen systeemin $\dot{\mathbf{z}} = A\mathbf{z}$ kanssa, jossa siis A on (4×4)-matriisi. Tarkemmin sanoen kuvaukset $\mathbf{x}\mapsto\mathbf{z} = (x_1,\dot{x}_1,x_2,\dot{x}_2)$ ja $\mathbf{z}\mapsto\mathbf{x} = (z_1,z_3)$ yhtälöiden ratkaisuavaruuksien välillä ovat toistensa käänteiskuvauksia ja siis bijektioita; lisäksi ratkaisuavaruudet ovat vektoriavaruuksia ja nämä kuvaukset lineaarisia ja siis lineaarisia isomorfismeja. Teorian nojalla tiedetään, että yhtälön $\dot{\mathbf{z}} = A\mathbf{z}$ ratkaisuavaruus on 4-ulotteinen. Siksi myös yhtälön $\ddot{\mathbf{x}} = B\mathbf{x}$ ratkaisuavaruus on 4-ulotteinen. Tämän nojalla yhtälöllä $\ddot{\mathbf{x}} = B\mathbf{x}$ on perusjärjestelmä $(\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_2,\mathbf{x}_3,\mathbf{x}_4)$.

Perusjärjestelmän löytämiseksi etsitään nyt muotoa $\mathbf{x}(t) = e^{rt}\mathbf{u}$ $\forall t\in\mathbb{R}$ olevia ratkaisuja, jossa $r\in\mathbb{C}$ ja $\mathbf{u} = (u_1,u_2)\in\mathbb{C}^2\setminus\{\mathbf{0}\}$ ovat vakioita. Sijoitus antaa ehdon

$$r^2e^{rt}\mathbf{u} = e^{rt}B\mathbf{u} \quad \forall t\in\mathbb{R} \iff B\mathbf{u} = r^2\mathbf{u}.$$

Siis luvun $\lambda = r^2$ on oltava (symmetrisen) matriisin B ominaisarvo ja vektorin $\mathbf{u}$ tähän ominaisarvoon liittyvä B:n ominaisvektori. Karakteristisen yhtälön

$$\det(B-\lambda I) = \begin{vmatrix}-2a-\lambda & a\\ a & -2a-\lambda\end{vmatrix} = \lambda^2 + 4a\lambda + 3a^2 = (\lambda+a)(\lambda+3a) = 0$$

juuret ovat erisuuret negatiiviset reaaliluvut $\lambda = -a$ ja $\lambda = -3a$. Etsitään vastaavat ominaisvektorit:

$$\begin{aligned} (B+aI)\mathbf{u} &= \begin{bmatrix}-a & a\\ a & -a\end{bmatrix}\mathbf{u} = \mathbf{0} \iff u_2 = u_1 \iff \mathbf{u} = s\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix} \quad (s\in\mathbb{C}\setminus\{0\}); \\ (B+3aI)\mathbf{u} &= \begin{bmatrix}a & a\\ a & a\end{bmatrix}\mathbf{u} = \mathbf{0} \iff u_2 = -u_1 \iff \mathbf{u} = s\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix} \quad (s\in\mathbb{C}\setminus\{0\}). \end{aligned}$$

Kummassakin valitaan $s = 1$. Merkitään jälleen $\omega = \sqrt{a} > 0$ ja $\eta = \sqrt{3a} = \omega\sqrt{3} > 0$. Tällöin $\lambda = -a \iff r = \pm i\omega$ ja $\lambda = -3a \iff r = \pm i\eta$. Nyt $e^{i\omega t} = \cos\omega t + i\sin\omega t$ ja $e^{i\eta t} = \cos\eta t + i\sin\eta t$. Täten saadaan reaaliarvoiset ratkaisut

$$\mathbf{x}_1(t) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}\cos\omega t, \quad \mathbf{x}_2(t) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}\sin\omega t, \quad \mathbf{x}_3(t) = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}\cos\eta t, \quad \mathbf{x}_4(t) = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}\sin\eta t,$$

joiden ensimmäisten koordinaattifunktioiden jono $(\cos\omega t, \sin\omega t, \cos\eta t, \sin\eta t)$ on vapaa $\mathbb{R}$:ssä, jolloin siis myös itse jono $(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3, \mathbf{x}_4)$ on vapaa $\mathbb{R}$:ssä ja täten perusjärjestelmä. Yleinen ratkaisu on näin ollen

$$\mathbf{x}(t) = C_1\begin{bmatrix} \cos\omega t \\ \cos\omega t \end{bmatrix} + C_2\begin{bmatrix} \sin\omega t \\ \sin\omega t \end{bmatrix} + C_3\begin{bmatrix} \cos\eta t \\ -\cos\eta t \end{bmatrix} + C_4\begin{bmatrix} \sin\eta t \\ -\sin\eta t \end{bmatrix} \quad \forall t \in \mathbb{R} \quad (C_1, C_2, C_3, C_4 \in \mathbb{R}),$$

eli sama kuin I ratkaisussa.

5. Homogeenisysteemillä

$$(1) \qquad \dot{\mathbf{z}}(t) = A(t)\mathbf{z}(t), \quad \text{jossa } A(t) = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1/t^2 & 1/t \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}, \ \mathbf{z}(t) = (x(t), y(t)) \in \mathbb{R}^2,$$

on välillä $I =]0, \infty[$ ratkaisu

$$\mathbf{z}_1(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ y_1(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Etsi systeemin perusjärjestelmä välillä I ja kirjoita yleinen ratkaisu.

Ratk. Kun $t > 0$, niin $A(t)\mathbf{z}_1(t) = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1/t^2 & 1/t \end{bmatrix}\begin{bmatrix} t \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1/t - 1/t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \dot{\mathbf{z}}_1(t)$. Siis $\mathbf{z}_1$ on todellakin ratkaisu välillä I.

Huomataan, että $x_1(t) = t \neq 0$ ja $y_1(t) = -1 \neq 0$ $\forall t > 0$. Täten (1):n ratkaiseminen voidaan palauttaa (1):n ratkaisemiseen ratkaisun $\mathbf{z}_1$ muodon huomioon ottavalla yritteellä

$$\mathbf{z}(t) = \begin{bmatrix} a(t)x_1(t) \\ b(t)y_1(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ta(t) \\ -b(t) \end{bmatrix}$$

määritettävin derivoituvin funktioin a ja b (**ratkaisun koordinaattien kerrointen varioinnin keino**), sillä jokainen ratkaisu (x, y) voidaan kirjoittaa tähän muotoon (ottamalla $a(t) = x(t)/t$ ja $b(t) = -y(t)$). Nyt

$$\begin{aligned}
(1) &\iff \begin{bmatrix} t\dot{a}(t) + a(t) \\ -\dot{b}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1/t^2 & 1/t \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ta(t) \\ -b(t) \end{bmatrix} \iff \begin{cases} t\dot{a}(t) + a(t) = b(t) \\ -\dot{b}(t) = a(t)/t - b(t)/t \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} \dot{a}(t) = (b(t) - a(t))/t \\ \dot{b}(t) = (b(t) - a(t))/t \end{cases} \iff \begin{cases} (b - a)\dot{}(t) = 0 \\ \dot{a}(t) = (b(t) - a(t))/t \end{cases} \iff \begin{cases} (b - a)(t) = c_1 \text{ jollain } c_1 \in \mathbb{R} \\ \dot{a}(t) = c_1/t \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} a(t) = c_1 \ln t + c_2 \text{ jollain } c_2 \in \mathbb{R} \\ b(t) = c_1(1 + \ln t) + c_2 \end{cases} \\
&\iff \underline{\mathbf{z}(t)} = \begin{bmatrix} c_1 t\ln t + c_2 t \\ -c_1(1 + \ln t) - c_2 \end{bmatrix} = \underline{c_1\begin{bmatrix} t\ln t \\ -1 - \ln t \end{bmatrix} + c_2\begin{bmatrix} t \\ -1 \end{bmatrix}} \quad \forall t > 0 \ (c_1, c_2 \in \mathbb{R}).
\end{aligned}$$

Tästä (1):n yleisestä ratkaisusta nähdään, että systeemillä on välillä I perusjärjestelmä $(\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2)$, jossa

$$\mathbf{z}_2(t) = \begin{bmatrix} t\ln t \\ -1 - \ln t \end{bmatrix} \quad \forall t > 0.$$

Tämän ratkaisun löytämiseksi riittäisi siis heti aluksi valita $c_1 = 1$ ja $c_2 = 0$.

Huom. Yleisemmin, jos homogeenisysteemissä $\dot{\mathbf{z}} = A\mathbf{z}$ on $A\colon I \to \mathbb{R}^{2\times 2}$ jatkuva välillä I ja tunnetaan ratkaisu $\mathbf{z}_1 = (x_1, y_1)\colon I \to \mathbb{R}^2$, jolla $x_1(t) \neq 0$ ja $y_1(t) \neq 0$ $\forall t \in I$, niin yritteellä $\mathbf{z}_2(t) = (a(t)x_1(t), b(t)y_1(t))$ saadaan integroinnein muodostettua sellainen toinen ratkaisu $\mathbf{z}_2$ välillä I, että $(\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2)$ on systeemin perusjärjestelmä välillä I.

Etsitään nyt $\mathbf{z}_2$ **eliminointi–variointi-keinolla** johtamalla 2. kl. skalaariyhtälö ja täydentämällä $\mathbf{z}_1$:stä saatava yksittäisratkaisu perusjärjestelmäksi vanhalla tutulla varioimiskeinolla. Ensin (y:n) eliminointi:

$$(1) \iff \begin{cases} \dot{x}(t) = -y(t) \\ \dot{y}(t) = x(t)/t^2 + y(t)/t \end{cases} \iff \begin{cases} y(t) = -\dot{x}(t) \\ -\ddot{x}(t) = x(t)/t^2 - \dot{x}(t)/t \end{cases} \iff \begin{cases} \ddot{x}(t) - (1/t)\dot{x}(t) + (1/t^2)x(t) = 0 \\ y(t) = -\dot{x}(t). \end{cases}$$

Tehdään 2. kl. yhtälöön yrite $x(t) = a(t)x_1(t) = a(t)t$, jolloin

$$0 = \frac{1}{t^2}x(t) - \frac{1}{t}\dot{x}(t) + \ddot{x}(t) = \frac{1}{t^2}a(t)t - \frac{1}{t}(\dot{a}(t)t + a(t)) + (\ddot{a}(t)t + 2\dot{a}(t)) = \ddot{a}(t)t + \dot{a}(t) \iff \ddot{a}(t) + \frac{1}{t}\dot{a}(t) = 0$$

$$\iff \dot{a}(t) = c_1 e^{-\int (dt/t)} = c_1 e^{-\ln t} = \frac{c_1}{t} \iff a(t) = c_1 \ln t + c_2 \iff x(t) = a(t)t = c_1 t \ln t + c_2 t \ (c_1, c_2 \in \mathbb{R}).$$

Tällöin $y(t) = -\dot{x}(t) = -c_1(1 + \ln t) - c_2$. Siis

$$(1) \iff \mathbf{z}(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = c_1 \begin{bmatrix} t\ln t \\ -1 - \ln t \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} t \\ -1 \end{bmatrix},$$

joten saadaan sama perusjärjestelmä kuin yllä.

Vaihtoehtoisesti eliminoimalla x saadaan (yhtäpitävä) systeemi

$$\begin{cases} x(t) = t^2\dot{y}(t) - ty(t) \\ \ddot{y}(t) + (1/t)\dot{y}(t) = 0 \end{cases},$$

jonka jälkimmäinen yhtälö on siis sama kuin a:lle edellisessä ratkaisutavassa (jos tehtäisiin siihen [nyt tarpeeton] yrite $y(t) = b(t)y_1(t) = -b(t)$, tulisi b:llekin tietysti sama yhtälö!). Yleinen ratkaisu $y(t) = c_1 \ln t + c_2$ antaa $x(t) = (c_1 - c_2)t - c_1 t \ln t$, joten merkitsemällä $\alpha = -c_1$ ja $\beta = c_1 - c_2$ (jolloin kääntäen $c_1 = -\alpha$ ja $c_2 = -\alpha - \beta$) saadaan alkuperäiselle systeemille yllä olevaa muotoa oleva yleinen ratkaisu $\mathbf{z}(t) = \alpha(t\ln t, -1 - \ln t) + \beta(t, -1)$ $(\alpha, \beta \in \mathbb{R})$.