Diff.yht. II, harjoitus 3, 24.–26.11.2009, ratkaisut (JL), 4 sivua

1. Palauta seuraavat differentiaaliyhtälöt 1. kl. normaalimuotoisiksi systeemeiksi:

(a) $y'' - \dfrac{1}{3}y^{(3)} + xy - 2x^3 = 0,$

(b) $(y'')^2 - \dfrac{1}{3}y^{(3)} + xyy' - 2x^3 = 0.$

Onko systeemi lineaarinen, ja jos on, niin onko se vakiokertoiminen?

Ratk. (a) Normaalimuotoisena yhtälö kuuluu $y^{(3)} = 3xy + 3y'' - 6x^3$. Merkitsemällä $y_1 = y$, $y_2 = y'$ ja $y_3 = y''$ (sekä kääntäen $y = y_1$) saadaan yhtäpitävä systeemi

$$\begin{cases} y_1' = y_2 \\ y_2' = y_3 \\ y_3' = 3xy_1 + 3y_3 - 6x^3 \end{cases} \quad \text{eli} \quad \mathbf{y}' = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 3x & 0 & 3 \end{bmatrix} \mathbf{y} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -6x^3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{y} = (y_1, y_2, y_3).$$

Yhtälöryhmä on lineaarinen, mutta ei vakiokertoiminen (kerroin $3x$).

(b) Normaalimuotoisena yhtälö kuuluu $y^{(3)} = 3xyy' + 3(y'')^2 - 6x^3$. Merkitsemällä $y_1 = y$, $y_2 = y'$ ja $y_3 = y''$ (sekä kääntäen $y = y_1$) saadaan yhtäpitävä systeemi

$$\begin{cases} y_1' = y_2 \\ y_2' = y_3 \\ y_3' = 3xy_1y_2 + 3y_3^2 - 6x^3. \end{cases}$$

Yhtälöryhmä ei ole lineaarinen (termit y_1y_2 ja y_3^2).

2. Etsi seuraavan lineaarisen homogeenisysteemin perusjärjestelmä $\mathbb{R}$:ssä:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ t & -1 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t), \quad \mathbf{x} = (x_1, x_2). \tag{1}$$

Ratk. Nyt (1) $\iff \begin{cases} \dot{x}_1(t) = -x_1(t) \\ \dot{x}_2(t) = tx_1(t) - x_2(t) \end{cases} \iff \begin{cases} x_1(t) = C_1e^{-t} \\ \dot{x}_2(t) + x_2(t) = C_1te^{-t} \end{cases}$. Tässä $\dot{x}_2(t) + x_2(t) = C_1te^{-t} \iff \dfrac{d}{dt}(e^tx_2(t)) = C_1t \iff e^tx_2(t) = \frac{1}{2}C_1t^2 + C_2 \iff x_2(t) = \frac{1}{2}C_1t^2e^{-t} + C_2e^{-t}$. Täten (1) $\iff \mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} C_1e^{-t} \\ \frac{1}{2}C_1t^2e^{-t} + C_2e^{-t} \end{bmatrix} = C_1e^{-t}\begin{bmatrix} 1 \\ \frac{1}{2}t^2 \end{bmatrix} + C_2e^{-t}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = C_1\mathbf{x}_1(t) + C_2\mathbf{x}_2(t)$ $\forall t \in \mathbb{R}$ joillain $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$, kun $\mathbf{x}_1(t) = e^{-t}\begin{bmatrix} 1 \\ \frac{1}{2}t^2 \end{bmatrix}$ ja $\mathbf{x}_2(t) = e^{-t}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ $\forall t \in \mathbb{R}$. Siis $(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)$ on (1):n perusjärjestelmä $\mathbb{R}$:ssä.

3. Etsi seuraavan homogeenisysteemin yleinen ratkaisu $\mathbb{R}$:ssä:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t), \quad \mathbf{x} = (x_1, x_2).$$

Onko vakioratkaisu $\mathbf{x}(t) \equiv \mathbf{0}$ stabiili vai epästabiili tasapainotila? Tässä ja seuraavissa tehtävissä käytetään merkintää $\mathbf{0} = (0, \cdots, 0) \in \mathbb{R}^n$.

Ratk. Kerroinmatriisi $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ on vakiokertoiminen. Sen karakteristisen yhtälön $\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 1 & -1-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 2 = 0$ juuret ovat erisuuret reaaliluvut $\lambda_{1,2} = \pm\sqrt{2}$. Etsitään näitä A:n ominaisarvoja vastaavat A:n ominaisvektorit $\mathbf{u} = (u_1, u_2) \in \mathbb{R}^2$ sekä systeemin ratkaisut $\mathbf{x}(t) = e^{\lambda t}\mathbf{u}$:

$\lambda_1 = \sqrt{2}$: $(A - \sqrt{2}I)\mathbf{u} = \mathbf{0} \Longleftrightarrow \begin{bmatrix} 1-\sqrt{2} & 1 \\ 1 & -1-\sqrt{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Longleftrightarrow \begin{cases} (1-\sqrt{2})u_1 + u_2 = 0 \\ u_1 - (1+\sqrt{2})u_2 = 0 \end{cases} \Longleftrightarrow u_1 = (1+\sqrt{2})u_2$ (sillä tällöin $(1-\sqrt{2})u_1 + u_2 = (1-2)u_2 + u_2 = 0$) ja siis $\Longleftrightarrow \mathbf{u} = c\begin{bmatrix} 1+\sqrt{2} \\ 1 \end{bmatrix}$ $(c \in \mathbb{R})$.

Valitsemalla $c = 1$ saadaan ratkaisu $\mathbf{x}_1(t) = e^{t\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1+\sqrt{2} \\ 1 \end{bmatrix}$ $\forall t \in \mathbb{R}$.

$\lambda_2 = -\sqrt{2}$: $(A + \sqrt{2}I)\mathbf{u} = \mathbf{0} \Longleftrightarrow \begin{bmatrix} 1+\sqrt{2} & 1 \\ 1 & -1+\sqrt{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Longleftrightarrow \begin{cases} (1+\sqrt{2})u_1 + u_2 = 0 \\ u_1 - (1-\sqrt{2})u_2 = 0 \end{cases} \Longleftrightarrow u_2 = -(1+\sqrt{2})u_1$ (sillä tällöin $u_1 - (1-\sqrt{2})u_2 = u_1 + (1-2)u_1 = 0$) ja siis $\Longleftrightarrow \mathbf{u} = c\begin{bmatrix} 1 \\ -1-\sqrt{2} \end{bmatrix}$ $(c \in \mathbb{R})$.

Valitsemalla $c = 1$ saadaan ratkaisu $\mathbf{x}_2(t) = e^{-t\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 \\ -1-\sqrt{2} \end{bmatrix}$ $\forall t \in \mathbb{R}$.

Nyt $(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)$ on perusjärjestelmä $\mathbb{R}$:ssä. Siis $\underline{\mathbf{x}(t) = C_1 e^{t\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1+\sqrt{2} \\ 1 \end{bmatrix} + C_2 e^{-t\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 \\ -1-\sqrt{2} \end{bmatrix}}$ $\forall t \in \mathbb{R}$ $(C_1, C_2 \in \mathbb{R})$ on yleinen ratkaisu $\mathbb{R}$:ssä.

Vakiofunktio $\mathbf{x}(t) \equiv \mathbf{0}$ on systeemin triviaaliratkaisu, koska $A\mathbf{0} = \mathbf{0}$ eli koska $\mathbf{0}$ on systeemin *kriittinen piste*. Tällaista ratkaisua kutsutaan systeemin *tasapainoratkaisuksi*. Koska $\lambda_1 = \sqrt{2} > 0$, on tämä tasapainokohta luentojen mukaan <u>epästabiili</u> (satulapiste, koska $\lambda_1 > 0 > \lambda_2$). (Muita tasapainokohtia ei ole, sillä $\det A = -2 \neq 0$, joten $A\mathbf{u} = \mathbf{0} \Longleftrightarrow \mathbf{u} = \mathbf{0}$.)

Osoitetaan suoraan, että tasapainokohta $\mathbf{x}(t) \equiv \mathbf{0}$ on epästabiili. Kiinnitetään $\varepsilon = 1 > 0$. Olkoon $\delta > 0$ kuinka pieni tahansa. Valitaan sellainen $a > 0$, jolla $|\mathbf{x}_0| < \delta$, kun $\mathbf{x}_0 = a(1+\sqrt{2}, 1)$. Tällöin $\mathbf{x}(t) = a\mathbf{x}_1(t) = e^{t\sqrt{2}}\mathbf{x}_0$ $\forall t \geq 0$ on ratkaisu, jolla $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$. Nyt $|\mathbf{x}(t)| = e^{t\sqrt{2}}|\mathbf{x}_0| \to \infty$, kun $t \to \infty$. Täten $|\mathbf{x}(t) - \mathbf{0}| \geq \varepsilon$ jollain $t \geq 0$, vaikka siis oli $|\mathbf{x}(0) - \mathbf{0}| < \delta$. (Vertaa stabiiliin tasapainokohtaan tehtävässä 5.)

4. Etsi seuraavan homogeenisysteemin perusmatriisi $\mathbb{R}$:ssä:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 3 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t), \quad \mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3).$$

Onko vakioratkaisu $\mathbf{x}(t) \equiv \mathbf{0}$ stabiili vai epästabiili tasapainotila?

Ratk. Olkoon $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 3 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{bmatrix}$. Karakteristisen yhtälön $\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 & 4 \\ 3 & 2-\lambda & -1 \\ 2 & 1 & -1-\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3-\lambda & 0 & 3-\lambda \\ 3 & 2-\lambda & -1 \\ 2 & 1 & -1-\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3-\lambda & 0 & 0 \\ 3 & 2-\lambda & -4 \\ 2 & 1 & -3-\lambda \end{vmatrix} = (3-\lambda)\begin{vmatrix} 2-\lambda & -4 \\ 1 & -3-\lambda \end{vmatrix} = (3-\lambda)\begin{vmatrix} 2-\lambda & -4 \\ -1+\lambda & 1-\lambda \end{vmatrix} = (3-\lambda)\begin{vmatrix} -2-\lambda & -4 \\ 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (3-\lambda)(-2-\lambda)(1-\lambda) = -(\lambda-3)(\lambda-1)(\lambda+2) = 0$ (jossa ensiksi lisättiin kolmas rivi ensimmäiseen riviin, sitten vähennettiin ensimmäinen sarake kolmannesta sarakkeesta, tämän jälkeen vähennettiin ensimmäinen rivi toisesta rivistä ja lopuksi lisättiin toinen sarake ensimmäiseen sarakkeeseen) juuret ovat erisuuret reaaliluvut $\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = 1$ ja $\lambda_3 = -2$. Etsitään näitä A:n ominaisarvoja λ vastaavat A:n ominaisvektorit $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3) \in \mathbb{R}^3$ sekä systeemin ratkaisut $\mathbf{x}(t) = e^{\lambda t}\mathbf{u}$:

$\lambda = 3$: $(A - 3I)\mathbf{u} = \begin{bmatrix} -2 & -1 & 4 \\ 3 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Longleftrightarrow \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & -5 \\ 2 & 1 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Longleftrightarrow \begin{cases} u_1 = u_3 \\ u_2 = 2u_3 \end{cases} \Longleftrightarrow \mathbf{u} = c\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ $(c \in \mathbb{R})$, jossa lisättiin kolmas yhtälö ensimmäiseen yhtälöön ja toiseen yhtälöön. Valitsemalla $c = 1$ saadaan ratkaisu $\mathbf{x}_1(t) = e^{3t}\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ $\forall t \in \mathbb{R}$.

$\lambda = 1$: $(A-I)\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 4 \\ 3 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \iff \begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \iff \begin{cases} u_1 = -u_3 \\ u_2 = 4u_3 \end{cases} \iff$ $\mathbf{u} = c \begin{bmatrix} -1 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix}$ $(c \in \mathbb{R})$, jossa lisättiin kolmas yhtälö ensimmäiseen yhtälöön ja vähennettiin kolmas yhtälö toisesta yhtälöstä. Valitsemalla $c = 1$ saadaan ratkaisu $\mathbf{x}_2(t) = e^t \begin{bmatrix} -1 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix}$ $\forall t \in \mathbb{R}$.

$\lambda = -2$: $(A+2I)\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 4 \\ 3 & 4 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{u} = \mathbf{0} \iff \begin{bmatrix} 5 & 0 & 5 \\ 5 & 5 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{u} = \mathbf{0} \iff \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{u} = \mathbf{0} \iff u_3 = u_2 = -u_1 \iff \mathbf{u} = c \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ $(c \in \mathbb{R})$, jossa ensin lisättiin kolmas yhtälö ensimmäiseen yhtälöön ja toiseen yhtälöön ja sitten jaettiin ensimmäinen ja toinen yhtälö 5:llä sekä vähennettiin nämä yhtälöt kolmannesta yhtälöstä. Valitsemalla $c = 1$ saadaan ratkaisu $\mathbf{x}_3(t) = e^{-2t} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ $\forall t \in \mathbb{R}$.

Näin ollen $(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3)$ on systeemin perusjärjestelmä $\mathbb{R}$:ssä. Täten systeemin perusmatriisi $\mathbb{R}$:ssä on

$$X(t) = [\,\mathbf{x}_1(t) \quad \mathbf{x}_2(t) \quad \mathbf{x}_3(t)\,] = \underline{\begin{bmatrix} e^{3t} & -e^t & -e^{-2t} \\ 2e^{3t} & 4e^t & e^{-2t} \\ e^{3t} & e^t & e^{-2t} \end{bmatrix}} \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Koska $\lambda_1 = 3 > 0$, on tasapainoratkaisu $\mathbf{x}(t) \equiv \mathbf{0}$ <u>epästabiili</u> (ja ainoa tasapainoratkaisu, sillä $\det A = \lambda_1\lambda_2\lambda_3 = -6 \neq 0$).

Ratk.

5. Tehtävää hieman muutettu 17.11. Etsi seuraavan homogeenisysteemin perusjärjestelmä $\mathbb{R}$:ssä:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & -3 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t), \quad \mathbf{x} = (x_1, x_2). \tag{1}$$

Kannattaako käyttää matriisikeinoa? Onko vakioratkaisu $\mathbf{x}(t) \equiv \mathbf{0}$ stabiili vai epästabiili tasapainotila?

Ratk. Matriisin $A = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & -3 \end{bmatrix}$ karakteristisella yhtälöllä $\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} -1-\lambda & 1 \\ -1 & -3-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 4\lambda + 4 = (\lambda+2)^2 = 0$ on kaksoisjuuri $\lambda = -2$. Määritetään ominaisvektorit $\mathbf{u} = (u_1, u_2) \in \mathbb{R}^2$: $(A+2I)\mathbf{u} = \mathbf{0} \iff \begin{cases} u_1 + u_2 = 0 \\ -u_1 - u_2 = 0 \end{cases} \iff u_2 = -u_1 \iff \mathbf{u} = c \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ $(c \in \mathbb{R})$. Täten A:n ominaisvektoreista ei voida valita kantaa $\mathbb{R}^2$:lle. Siis <u>perusjärjestelmää ei saada suoraan matriisikeinolla</u>. Tulee kuitenkin yksi ratkaisu $\mathbf{x}_1(t) = e^{-2t} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ $\forall t \in \mathbb{R}$.

Käytetään eliminointikeinoa. Nyt (1) $\iff \begin{cases} \dot{x}_1 = -x_1 + x_2 \\ \dot{x}_2 = -x_1 - 3x_2 \end{cases}$. Derivoidaan ensimmäinen yhtälö, sijoitetaan $\dot{x}_2$ toisesta yhtälöstä ja lopuksi sijoitetaan $x_2 = \dot{x}_1 + x_1$ ensimmäisestä yhtälöstä:

$$\ddot{x}_1 = -\dot{x}_1 + \dot{x}_2 = -\dot{x}_1 + (-x_1 - 3x_2) = -\dot{x}_1 - x_1 - 3x_2 = -\dot{x}_1 - x_1 - 3(\dot{x}_1 + x_1) = -4\dot{x}_1 - 4x_1 \iff \ddot{x}_1 + 4\dot{x}_1 + 4 = 0.$$

Tämän vakiokertoimisen lineaarisen homogeeniyhtälön karakteristinen yhtälö on $r^2 + 4r + 4 = 0 \iff r = -2$ eli sama kuin matriisille A. Tulee yleinen ratkaisu $x_1(t) = C_1 e^{-2t} + C_2 t e^{-2t}$. Nyt

$$x_2(t) = \dot{x}_1(t) + x_1(t) = (-2C_1 e^{-2t} - 2C_2 t e^{-2t} + C_2 e^{-2t}) + (C_1 e^{-2t} + C_2 t e^{-2t}) = (-C_1 + C_2)e^{-2t} - C_2 t e^{-2t}.$$

Siis (1):n yleinen ratkaisu $\mathbb{R}$:ssä on $\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = C_1 e^{-2t} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} + C_2 e^{-2t} \begin{bmatrix} t \\ 1-t \end{bmatrix}$ $\forall t \in \mathbb{R}$ $(C_1, C_2 \in \mathbb{R})$.

Täten (1):llä on $\mathbb{R}$:ssä perusjärjestelmä $(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)$, jossa $\mathbf{x}_1(t) = e^{-2t} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ on sama kuin yllä ja $\mathbf{x}_2(t) = e^{-2t} \begin{bmatrix} t \\ 1-t \end{bmatrix}$.

Osoitetaan, että tasapainokohta $\mathbf{x}(t) \equiv \mathbf{0}$ on stabiili ja jopa eksponentiaalisesti stabiili.

Koska $e^{-t}|(t, 1-t)| = e^{-t}\sqrt{t^2 + (1-t)^2} = e^{-t}\sqrt{2t^2 - 2t + 1} = (t/e^t)\sqrt{2 - 2/t + 1/t^2} \to 0$, kun $t \to \infty$, niin on olemassa vakio $M_0 > 0$, jolla $e^{-t}|(t, 1-t)| \le M_0$ $\forall t \ge 0$. Olkoon $\mathbf{x}_0 = (x_{01}, x_{02}) \in \mathbb{R}^2$. Tällöin $\mathbf{x}(t) = x_{01} e^{-2t}(1, -1) + (x_{01} + x_{02}) e^{-2t}(t, 1-t)$ $\forall t \ge 0$ on ratkaisu, jolla $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$. Koska $e^{-2t} = e^{-t} e^{-t} \le e^{-t}$, kun $t \ge 0$, ja koska $|x_{01}|, |x_{02}| \le |\mathbf{x}_0|$, saamme $\mathbb{R}^2$:n kolmioepäyhtälön avulla, että

$$|\mathbf{x}(t) - \mathbf{0}| \le |x_{01}| e^{-2t} |(1, -1)| + (|x_{01}| + |x_{02}|) e^{-t} e^{-t} |(t, 1-t)| \le (\sqrt{2} + 2M_0)|\mathbf{x}_0| e^{-t} = M|\mathbf{x}_0| e^{-t} \quad \forall t \ge 0,$$

kun $M = \sqrt{2} + 2M_0$.

Olkoon nyt $\varepsilon > 0$. Valitaan $\delta = \varepsilon / M > 0$. Jos $|\mathbf{x}_0 - \mathbf{0}| < \delta$, niin $|\mathbf{x}(t) - \mathbf{0}| \le M|\mathbf{x}_0| < M\delta = \varepsilon$ $\forall t \ge 0$. Ratkaisu siis pysyy mielivaltaisen lähellä pistettä $\mathbf{0}$, jos se lähtee riittävän läheltä pistettä $\mathbf{0}$. Täten tasapainokohta on <u>stabiili</u>.

Valitaan sitten $\delta = 1$, M kuten yllä ja $\gamma = 1$. Oletaan, että $|\mathbf{x}_0 - \mathbf{0}| < 1$. Tällöin $|\mathbf{x}(t) - \mathbf{0}| \le M e^{-t}$ $\forall t \ge 0$. On siis olemassa positiiviset vakiot δ, M ja γ, joilla $|\mathbf{x}(t) - \mathbf{0}| \le M e^{-\gamma t}$ $\forall t \ge 0$, kun $|\mathbf{x}_0 - \mathbf{0}| < \delta$. Koska tasapainokohta on stabiili, on se täten jopa <u>eksponentiaalisesti stabiili</u>.