Diff.yht. II, harjoitus 2, 17.–19.11.2009, ratkaisut (JL), 2 sivua

1. Laske kolme ensimmäistä Picardin approksimaatiota alkuarvotehtävälle $y' = \cos x,\ y(\pi) = 0$. Huomaatko jotain erikoista, ja kuinka selität sen?

Ratk. Olkoon $x_0 = \pi$, $y_0 = 0$ ja $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = \cos x$. Tällöin $\underline{y_0(x)} = y_0 = \underline{0}\ \forall x \in \mathbb{R}$, $\underline{y_1(x)} = y_0 + \int_{x_0}^x f(t, y_0(t))\,dt = \int_\pi^x \cos t\,dt = \Big/_{\pi}^{x} \sin t = \underline{\sin x}\ \forall x \in \mathbb{R}$ ja $\underline{y_2(x)} = 0 + \int_\pi^x f(t, y_1(t))\,dt = \int_\pi^x \cos t\,dt = \underline{\sin x}$ $\forall x \in \mathbb{R}$. Siis $y_2 = y_1$. Näin täytyy ollakin, sillä $f(x,y) = \cos x$ riippuu vain x:stä, joten heti $y = y_1$ on AAT:n ja siis myös integraaliyhtälön $y(x) = 0 + \int_\pi^x f(t, y(t))\,dt\ \forall x \in \mathbb{R}$ tarkka ratkaisu, jolloin iteraatio ei tuota enää muutosta.

2. Palauta seuraavat skalaariyhtälöt 1. kl. systeemeiksi:
(a) $y^{(3)} + \sin x\, y' + y = \cos x$,
(b) $y^{(4)} + x^2 y'' + x^4 y = \sin x$.

Ratk. (a) Olkoon y annetun (kolmannen kertaluvun lineaarisen) yhtälön ratkaisu jollain välillä I. Merkitään $y_1 = y$, $y_2 = y'$ ja $y_3 = y''$. Tällöin $y_1' = y' = y_2$, $y_2' = y'' = y_3$ ja $y_3' = y^{(3)} = -y - \sin x\, y' + \cos x = -y_1 - \sin x\, y_2 + \cos x$, joten (y_1, y_2, y_3) on välillä I seuraavan ensimmäisen kertaluvun (lineaarisen) systeemin ratkaisu:

$$\begin{cases} y_1' = y_2 \\ y_2' = y_3 \\ y_3' = -y_1 - \sin x\, y_2 + \cos x. \end{cases}$$

Kääntäen, jos (y_1, y_2, y_3) on tämän systeemin ratkaisu jollain välillä I, niin $y = y_1$ on alkuperäisen yhtälön ratkaisu välillä I, sillä $y' = y_1' = y_2$, $y'' = y_2' = y_3$ ja siis $y^{(3)} = y_3' = -y_1 - \sin x\, y_2 + \cos x = -y - \sin x\, y' + \cos x$. Saatu systeemi on täten yhtäpitävä alkuperäisen yhtälön kanssa.
(b) Sijoittamalla toiseen suuntaan $y_i = y^{(i-1)}$, kun $i = 1, 2, 3, 4$, ja toiseen suuntaan $y = y_1$ saadaan

$$y^{(4)} + x^2 y'' + x^4 y = \sin x \iff \begin{cases} y_1' = y_2 \\ y_2' = y_3 \\ y_3' = y_4 \\ y_4' = -x^4 y_1 - x^2 y_3 + \sin x \end{cases} \iff \mathbf{y}'(x) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -x^4 & 0 & -x^2 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{y}(x) + \mathbf{b}(x),$$

jossa $\mathbf{y} = (y_1, y_2, y_3)$ ja $\mathbf{b}(x) = (0, 0, 0, \sin x)$.

3. (a) Palauta seuraava systeemi normaalimuotoiseksi 1. kl. systeemiksi: $\begin{cases} \ddot{y} = f(t, x, y, \dot{y}) \\ \dot{x} = g(t, x, y) \end{cases}$.
(b) Entä, jos ensimmäinen yhtälö kuuluukin $\ddot{y} = f(t, x, y, \dot{x}, \dot{y})$?

Ratk. (a) Olkoon (x, y) tämän systeemin ratkaisu jollain välillä I. Merkitään $z_1 = x$, $z_2 = y$ ja $z_3 = \dot{y}$. Tällöin (z_1, z_2, z_3) on seuraavan normaalimuotoisen 1. kl. systeemin ratkaisu välillä I:

$$\begin{cases} \dot{z}_1 = g(t, z_1, z_2) \\ \dot{z}_2 = z_3 \\ \dot{z}_3 = f(t, z_1, z_2, z_3). \end{cases}$$

Kääntäen, jos (z_1, z_2, z_3) on tämän normaalimuotoisen 1. kl. systeemin ratkaisu jollain välillä I, niin $(x, y) = (z_1, z_2)$ on alkuperäisen systeemin ratkaisu välillä I. Siis systeemit ovat yhtäpitävät.
(b) Toisen yhtälön $\dot{x} = g(t, x, y)$ nojalla ensimmäinen yhtälö $\ddot{y} = f(t, x, y, \dot{x}, \dot{y})$ voidaan kirjoittaa muotoon $\ddot{y} = f(t, x, y, g(t, x, y), \dot{y})$. Täten alkuperäisen systeemin kanssa yhtäpitävä normaalimuotoinen 1. kl. systeemi on nyt seuraava:

$$\begin{cases} \dot{z}_1 = g(t, z_1, z_2) \\ \dot{z}_2 = z_3 \\ \dot{z}_3 = f(t, z_1, z_2, g(t, z_1, z_2), z_3). \end{cases}$$

4. Osoita, että $(\mathbf{x}_1(t), \mathbf{x}_2(t)) = \left([\,2 \quad e^t\,]^T, [\,e^{-t} \quad 1\,]^T\right)$ on lineaarisen homogeenisysteemin

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} 1 & -2e^{-t} \\ e^t & -1 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t), \qquad \mathbf{x} = (x_1, x_2),$$

perusjärjestelmä $\mathbb{R}$:ssä.

Ratk. Olkoon $A(t) = \begin{bmatrix} 1 & -2e^{-t} \\ e^t & -1 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t)\ \forall x \in \mathbb{R}$. Tällöin funktio $A\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{2\times 2}$ on jatkuva. Koska

$$A(t)\mathbf{x}_1(t) = \begin{bmatrix} 1 & -2e^{-t} \\ e^t & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ e^t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \cdot 2 + (-2e^{-t})e^t \\ e^t \cdot 2 + (-1)e^t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ e^t \end{bmatrix} = \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} 2 \\ e^t \end{bmatrix} = \dot{\mathbf{x}}_1(t) \quad \forall t \in \mathbb{R},$$

niin $\mathbf{x} = \mathbf{x}_1$ on yhtälön $\dot{x} = A\mathbf{x}$ ratkaisu $\mathbb{R}$:ssä. Samoin $\mathbf{x} = \mathbf{x}_2$ on yhtälön $\dot{x} = A\mathbf{x}$ ratkaisu $\mathbb{R}$:ssä, sillä

$$A(t)\mathbf{x}_2(t) = \begin{bmatrix} 1 & -2e^{-t} \\ e^t & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{-t} \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{-t} - 2e^{-t} \\ 1 - 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -e^{-t} \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} e^{-t} \\ 1 \end{bmatrix} = \dot{\mathbf{x}}_2(t) \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Lisäksi pari $(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)$ on vapaa $\mathbb{R}$:ssä, sillä sen Wronskin determinantille on

$$W(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)(t) = \det(\mathbf{x}_1(t), \mathbf{x}_2(t)) = \begin{vmatrix} 2 & e^{-t} \\ e^t & 1 \end{vmatrix} = 2 \cdot 1 - e^t e^{-t} = 2 - 1 = 1 \neq 0 \qquad t \in \mathbb{R}.$$

Täten $(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)$ on yhtälön $\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x}$ perusjärjestelmä $\mathbb{R}$:ssä.

5. Ratkaise eliminointikeinolla seuraava lineaarinen homogeenisysteemi ja anna sen perusjärjestelmä $\mathbb{R}$:ssä:

$$\mathbf{y}'(x) = \begin{bmatrix} -2 & 1/2 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} \mathbf{y}(x), \qquad \mathbf{y} = (y_1, y_2).$$

Ratk. Oletetaan, että $\mathbf{y}$ on tämän vektoriyhtälön ratkaisu. Tällöin

$$y_1'(x) = -2y_1(x) + \frac{1}{2}y_2(x) \quad \text{ja} \tag{1}$$

$$y_2'(x) = 2y_1(x) - 2y_2(x). \tag{2}$$

Yhtälö (1) antaa

$$y_2(x) = 2y_1'(x) + 4y_1(x). \tag{3}$$

Derivoimalla yhtälö (1) puolittain (*vaara uusista ratkaisuista!*) ja sijoittamalla siihen sitten (2) ja (3) saadaan, että

$$y_1'' \overset{(1)}{=} -2y_1' + \frac{1}{2}y_2' \overset{(2)}{=} -2y_1' + \frac{1}{2}(2y_1 - 2y_2) = -2y_1' + y_1 - y_2 \overset{(3)}{=} -2y_1' + y_1 - (2y_1' + 4y_1) = -4y_1' - 3y_1,$$

joten y_2 eliminoitui, ja

$$y_1'' + 4y_1' + 3y_1 = 0. \tag{4}$$

Kääntäen, jos y_1 on (4):n ratkaisu ja y_2 määräytyy (3):sta, niin (1) toteutuu, ja

$$y_2' \overset{(3)}{=} 2y_1'' + 4y_1' \overset{(4)}{=} 2(-4y_1' - 3y_1) + 4y_1' = -4y_1' - 6y_1 \overset{(1)}{=} -4(-2y_1 + \frac{1}{2}y_2) - 6y_1 = 2y_1 - 2y_2,$$

eli myös (2) toteutuu (*vaara vältetty!*). Riittää siis ratkaista ensin 2. kl. yhtälö (4) y_1:lle ja sitten 0. kl. yhtälö (3) y_2:lle.

Nyt vakiokertoimisen homogeeniyhtälön (4) karakteristisen yhtälön $r^2 + 4r + 3 = (r+1)(r+3) = 0$ juuret ovat -1 ja -3, joten (4):n yleinen ratkaisu on $y_1(x) = c_1e^{-x} + c_2e^{-3x}$ $\forall x \in \mathbb{R}$ $(c_1, c_2 \in \mathbb{R})$. Tällöin $y_1'(x) = -c_1e^{-x} - 3c_2e^{-3x}$, joten sijoitus (3):een antaa $y_2(x) = 2(-c_1e^{-x} - 3c_2e^{-3x}) + 4(c_1e^{-x} + c_2e^{-3x}) = 2c_1e^{-x} - 2c_2e^{-3x}$ $\forall x \in \mathbb{R}$. Täten annetun homogeeniyhtälön yleinen ratkaisu on

$$\mathbf{y}(x) = \begin{bmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1e^{-x} + c_2e^{-3x} \\ 2c_1e^{-x} - 2c_2e^{-3x} \end{bmatrix} = c_1e^{-x} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} + c_2e^{-3x} \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad (c_1, c_2 \in \mathbb{R})$$

ja perusjärjestelmä $\mathbb{R}$:ssä siis $(e^{-x}[\,1 \quad 2\,]^T, e^{-3x}[\,1 \quad -2\,]^T)$.

Huom. Implikaatiolle $(1)\&(2) \Rightarrow (3)\&(4)$ käänteisen implikaation $(3)\&(4) \Rightarrow (1)\&(2)$ osoittamisen sijasta riittäisi jälkikäteen huomata ratkaisuavaruuksista $\mathbb{R}$:ssä, että tietysti $\{\mathbf{y} \mid (1)\&(2)\} \subset \{\mathbf{y} \mid (3)\&(4)\}$, että teorian nojalla $\{\mathbf{y} \mid (1)\&(2)\}$ on 2-ulotteinen vektoriavaruus ja että, kuten nähtiin, $\{\mathbf{y} \mid (3)\&(4)\}$ on korkeintaan 2-ulotteinen vektoriavaruus; tällöin nimittäin $\{\mathbf{y} \mid (1)\&(2)\} = \{\mathbf{y} \mid (3)\&(4)\}$.