Diff.yht. II, harjoitus 1, 10.–12.11.2009, ratkaisut (JL), 2 sivua

1. Määrää kolme ensimmäistä Picardin approksimaatiota AAT:lle $y' = -y$, $y(0) = 2$.

Ratk. Olkoon $x_0 = 0$, $y_0 = 2$ ja $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = -y$. Tällöin $\underline{y_0(x) = 2}$ $\forall x \in \mathbb{R}$ ja $y_{n+1}(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y_n(t))\,dt = 2 - \int_0^x y_n(t)\,dt$ $\forall x \in \mathbb{R}$, kun $n \geq 1$. Siis $\underline{y_1(x)} = 2 - \int_0^x 2\,dt = \underline{2 - 2x}$ $\forall x \in \mathbb{R}$ ja $\underline{y_2(x)} = 2 - \int_0^x (2 - 2t)\,dt = \underline{2 - 2x + x^2}$ $\forall x \in \mathbb{R}$.

Huom. Tarkalla ratkaisulla $y(x) = 2e^{-x}$ $\forall x \in \mathbb{R}$ on 0-keskinen Taylorin sarja $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} 2(-1)^n x^n/n! = 2(1 - x + x^2/2 - x^3/3! + \dots) = 2 - 2x + x^2 - x^3/3 + \dots$ $\forall x \in \mathbb{R}$. Induktiolla voidaan osoittaa, että y_n on y:n 0-keskinen n-asteinen Taylorin polynomi kaikilla $n \geq 0$.

2. Onko funktio $f(x,y) = e^{x+y}$ joukossa $I \times J$ tasaisesti Lipschitz-jatkuva muuttujan y suhteen, kun
(a) $I = [0,1]$ ja $J = [0,1]$,
(b) $I = [0,1]$ ja $J = \mathbb{R}$,
(c) $I = \mathbb{R}$ ja $J = [0,1]$?

Muutaman sanan vastaus riittää, ei tarvitse todistaa.

Ratk. On siis tutkittava, päteekö jollakin $0 \leq M < \infty$ ehto

$$|f(x,y_1) - f(x,y_2)| \leq M|y_1 - y_2| \quad \text{kaikilla } x \in I \text{ ja } y_1, y_2 \in J.$$

Tarvitaan Analyysi I:n *väliarvolause*: Jos $\varphi: [a,b] \to \mathbb{R}$ on jatkuva funktio, joka on derivoituva välillä $]a,b[$, niin $\varphi(b) - \varphi(a) = \varphi'(\xi)(b - a)$ jollain $\xi \in]a,b[$. Tällöin, jos on olemassa vakio $M \geq 0$, jolla $|\varphi'(t)| \leq M$ kaikilla $t \in]a,b[$, niin $|\varphi(s) - \varphi(t)| \leq M|s - t|$ kaikilla $s, t \in [a,b]$ eli φ on M-Lipschitz. Erityisesti, jos φ on jatkuvasti derivoituva välillä $[a,b]$, jolloin φ' on rajoitettu, niin φ on Lipschitz-jatkuva.

(a) Nyt, kun $x, y_1, y_2 \in [0,1]$, niin

$$|f(x,y_1) - f(x,y_2)| = |e^{x+y_1} - e^{x+y_2}| = e^x|e^{y_1} - e^{y_2}| \leq e|e^{y_1} - e^{y_2}| = ee^{\xi}|y_1 - y_2| \leq e^2|y_1 - y_2|$$

eräällä $\xi \in [0,1]$, joten <u>tasainen Lipschitz-ehto jälkimmäisen muuttujan suhteen pätee</u> vakiolla $M = e^2$.
Tai: Koska $D_2 f(x,y) = \frac{\partial}{\partial y} e^{x+y} = e^{x+y}$, niin $\sup_{(x,y) \in I \times J} |D_2 f(x,y)| = e^{1+1} = e^2$, josta väliarvolauseen nojalla seuraa ylläoleva tasainen Lipschitz-ehto.

(b) Nyt

$$\frac{|f(0,y) - f(0,0)|}{|y - 0|} = \frac{e^y - 1}{y} \to \infty, \quad \text{kun } 0 < y \to \infty.$$

Tällöin <u>tasainen Lipschitz-ehto muuttujan y suhteen ei voi päteä</u>. (Se ei siis pätisi, vaikka olisi $I = \{0\}$.)
Tai: Jos f olisi tasaisesti M-Lipschitz muuttujan y suhteen jollain $M \geq 0$, niin ehdosta $|f(x,y_1) - f(x,y)| \leq M|y_1 - y|$ kaikilla $y_1 \in J$, kun $x \in I$ ja $y \in J$, seuraisi rajalla $y_1 \to y$, että $|D_2 f(x,y)| = |\frac{\partial}{\partial y} f(x,y)| \leq M$, kun $x \in I$ ja $y \in J$. Mutta $\sup_{(x,y) \in I \times J} |D_2 f(x,y)| \geq \lim_{y \to \infty} |D_2 f(0,y)| = \lim_{y \to \infty} e^y = \infty$, ristiriita.

(c) Koska

$$\frac{|f(x,1) - f(x,0)|}{|1 - 0|} = e^{x+1} - e^x = e^x(e - 1) \to \infty, \quad \text{kun } x \to \infty,$$

niin <u>tasainen Lipschitz-ehto muuttujan y suhteen ei päde</u>.
Tai: $\sup_{(x,y) \in I \times J} |D_2 f(x,y)| \geq \lim_{x \to \infty} |D_2 f(x,0)| = \lim_{x \to \infty} e^x = \infty$, josta väite seuraa.

3. (a) Missä $\mathbb{R}^2$:n alueissa DY $y' = \sqrt[3]{y - 1}$ toteuttaa lokaalin OY-lauseen ehdot (kun lauseessa sovelletaan lokaalia versiota Lipschitz-ehdosta)? Perustele lyhyesti ehtojen voimassaolo.

(b) Osoita, että $f(x,y) = \sqrt[3]{y - 1}$ ei ole esimerkiksi suorakaiteessa $[0,1] \times [0,1]$ tasaisesti Lipschitz-jatkuva muuttujan y suhteen.

Ratk. (a) Funktio $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x,y) \mapsto (y - 1)^{1/3}$, kuten (b):ssä on jatkuva, ja

$$\frac{\partial}{\partial y} f(x,y) = \frac{1}{3}(y - 1)^{-2/3} = \frac{1}{3\sqrt[3]{(y - 1)^2}}$$

on määritelty ja jatkuva avoimissa puolitasoissa $D_+ = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > 1\}$ ja $D_- = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y < 1\}$. Siis alueissa $D_\pm$ tutkittava DY toteuttaa lokaalin OY-lauseen oletukset. Koska $(\partial/\partial y)f(x,y) \to \infty$, kun $(x,y) \to (x,1)$ alueissa $D_\pm$ kullakin $x \in \mathbb{R}$, niin alueet $D_\pm$ ovat maksimaalisia tässä suhteessa.

Huom. Kullakin $x_0 \in \mathbb{R}$ on AAT:llä $y' = f(x,y)$, $y(x_0) = 1$, esimerkiksi globaalit ratkaisut $y_\pm\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, joilla $y_\pm(x) = 1$, kun $x \le x_0$, ja $y_\pm(x) = 1 \pm \sqrt{\frac{8}{27}(x-x_0)^3}$, kun $x \ge x_0$; nämä ratkaisut eivät yhdy missään pisteen x_0 ympäristössä.

(b) Tämä seuraa siitä, että $\sup\{(\partial/\partial y)f(x,y) \mid 0 \le x \le 1, 0 \le y < 1\} = \infty$.

4. Olkoon funktio y AAT:n

$$y' = e^x \sin x \cos y, \quad y(0) = y_0 \in \mathbb{R},$$

(maksimaali)ratkaisu. Osoita globaalin OY-lauseen avulla, että y on määritelty koko $\mathbb{R}$:ssä.

Ratk. Olkoon $f(x,y) = e^x \sin x \cos y$ $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$. Tällöin f on jatkuva, ja $(\partial/\partial y)f(x,y) = -e^x \sin x \sin y$ $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$. Jos $a, b \in \mathbb{R}$ ja $a < b$, niin $|(\partial/\partial y)f(x,y)| = e^x |\sin x||\sin y| \le e^b \quad \forall (x,y) \in [a,b] \times \mathbb{R}$, joten f on tasaisesti Lipschitz-jatkuva (nimittäin e^b-Lipschitz-jatkuva) muuttujan y suhteen joukossa $[a,b] \times \mathbb{R}$ (voitaisiin ottaa $b > 0$ ja $a = -b$). Siis globaalin OY-lauseen oletukset ovat voimassa, joten AAT:n (maksimaalinen) ratkaisu y on (olemassa, yksikäsitteinen ja) määritelty koko $\mathbb{R}$:ssä.

5. Olkoon $y\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ edellisen tehtävän AAT:n ratkaisu. Osoita OY-lauseen avulla, lokaalin tai globaalin, että y on rajoitettu funktio, ts. on olemassa sellainen vakio $M > 0$, että $|y(x)| \le M$ kaikilla $x \in \mathbb{R}$.

Ratk. Itse DY on separoituva, ja koska $\cos y = 0 \iff y = \frac{1}{2}\pi + n\pi$ ($n \in \mathbb{Z}$), niin DY:llä on triviaaliratkaisut $y_n(x) = \frac{1}{2}\pi + n\pi$ $\forall x \in \mathbb{R}$, kun $n \in \mathbb{Z}$. Jos $y_0 = \frac{1}{2}\pi + n\pi$ jollain $n \in \mathbb{Z}$, niin $y = y_n$ on vakiofunktio ja siis rajoitettu. Muutoin on $\frac{1}{2}\pi + n\pi < y_0 < \frac{1}{2}\pi + (n+1)\pi$ jollain $n \in \mathbb{Z}$, ja tällöin on $\frac{1}{2}\pi + n\pi < y(x) < \frac{1}{2}\pi + (n+1)\pi$ $\forall x \in \mathbb{R}$ OY-lauseen mukaan; siis nytkin y on rajoitettu.

Huom. Se, että maksimaaliratkaisulle $y\colon \Delta \to \mathbb{R}$ on $\Delta = \mathbb{R}$, voidaan päätellä globaalia OY-lausetta käyttämättä myös siitä, että y:n kuvaajan tiedetään juoksevan DY:n määrittelyalueen $\mathbb{R}^2$ "reunalta reunalle" ja että y on rajoitettu, mikä taas nähdään lokaalin OY-lauseen avulla kuten yllä. (Väli Δ on muotoa $]a,b[$ joillain $-\infty \le a < b \le \infty$. On olemassa $M \ge 0$, jolla $|y(x)| \le M$ $\forall x \in \Delta$. Tehdään antiteesi, että $b < \infty$. Valitaan piste c, jolla $a < c < b$. Olkoon $\alpha = \max\{|c|, |b|\}$. Tällöin $|x| \le \alpha$, kun $c \le x < b$. Siis $|(x, y(x)| = \sqrt{x^2 + y(x)^2} \le \sqrt{c^2 + M^2}$, kun $c \le x < b$. Mutta $|(x, y(x))| \to \infty$, kun $x \to b-$. Tämä ristiriita osoittaa, että $b = \infty$. Samalla tavalla osoitetaan, että $a = -\infty$.)