Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Differentiaaliyhtälöt II
Kurssikoe 15.12.2009, ratkaisut

1. Määrää seuraavan autonomisen systeemin kriittiset pisteet ja niiden laatu sekä anna systeemin yleinen ratkaisu:

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= -3x + y\\ \dot{y}(t) &= 4x - 3y + 5.\end{aligned}$$

Ratkaisu: Lasketaan kriittiset pisteet.

$$3x + 2y = 0,\ 4x - 3y + 5 = 0 \Leftrightarrow x = 1,\ y = 3.$$

Merkitään

$$\mathbf{z}(t) = (x(t), y(t)), \quad A = \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 4 & -3 \end{bmatrix}.$$

Lasketaan A:n ominaisarvot ja -vektorit:

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} -3-\lambda & 1 \\ 4 & -3-\lambda \end{vmatrix} = (\lambda+3)^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow \lambda_1 = -1,\ \lambda_2 = -5.$$

Negatiiviset. Siten kriittinen piste $(1, 3)$ on asymptoottisesti stabiili.

$$\lambda = -1, \quad (A - \lambda I)\mathbf{u} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 4 & -2 \end{bmatrix} \mathbf{u} = \mathbf{0} \Leftrightarrow -2u_1 + u_2 = 0 \Leftrightarrow \mathbf{u} = s \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix},$$

$$\lambda = -5, \quad (A - \lambda I)\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} \mathbf{u} = \mathbf{0} \Leftrightarrow 2u_1 + u_2 = 0 \Leftrightarrow \mathbf{u} = s \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}.$$

Siten HS:llä $\dot{\mathbf{z}} = A\mathbf{z}$ on perusjärjestelmä

$$\left(e^{-t} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix},\ e^{-5t} \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}\right).$$

Kriittinen piste antaa alkuperäiselle EHS:lle yksittäisratkaisun $\mathbf{z}_p(t) \equiv (1, 3)$. Siten EHS:n yleinen ratkaisu on

$$\mathbf{z}(t) = \mathbf{z}_p(t) + \mathbf{z}_h(t) = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} + c_1 e^{-t} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} + c_2 e^{-5t} \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}, \quad c_1, c_2 \in \mathbf{R}.$$

2. Anna seuraavan systeemin yleinen ratkaisu:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -5 & -2 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} 2e^{-t} \\ -6e^{-t} \end{bmatrix}.$$

Ratkaisu: Merkitään

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -5 & -2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{f} = e^{-t} \begin{bmatrix} 2 \\ -6 \end{bmatrix},$$

jolloin systeemi voidaan kirjoittaa muotoon $\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x} + \mathbf{f}$ (1). Ratkaistaan ensin vastaava HS $\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x}$. Matriisin A ominaisarvot ja -vektorit:

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 \\ -5 & -2-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow \lambda \pm i \Rightarrow \alpha = 0,\ \beta = 1.$$

$$\lambda = i,\ (A-\lambda I)\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 2-i & 1 \\ -5 & -2-i \end{bmatrix} \mathbf{u} = \mathbf{0} \Leftrightarrow (2-i)u_1 + u_2 = 0 \Leftrightarrow \mathbf{u} = s \begin{bmatrix} 1 \\ i-2 \end{bmatrix} = s\Big(\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} + i \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \Big).$$

Siten $\mathbf{a} = (1, -2)$ ja $\mathbf{b} = (0, 1)$, ja HS:llä on pj.

$$\Big(\cos t \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} - \sin t \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix},\ \sin t \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} + \cos t \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \Big).$$

Etsitään EHS:n (1) yksittäisratkaisu suoralla yritteellä $\mathbf{x}(t) = e^{-t}\mathbf{a},\ \mathbf{a} \in \mathbf{R}^2$. Silloin $\dot{\mathbf{x}}(t) = -e^{-t}\mathbf{a}$ ja

$$-e^{-t}\mathbf{a} = \dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x} + \mathbf{f} = e^{-t}A\mathbf{a} + e^{-t}(2, -6) \quad \forall t \Leftrightarrow (A + I)\mathbf{a} = A\mathbf{a} + \mathbf{a} = (-2, 6),$$

mikä auki kirjoitettuna (laajettuna matriisina) antaa

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 & -2 \\ -5 & -1 & 6 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 3 & 1 & -2 \\ -2 & 0 & 4 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \mathbf{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

Siten EHS:llä (1) on yksittäisratkaisu $\mathbf{x}_p = e^{-t}(-2, 4)$, ja sen yleinen ratkaisu on

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}_p(t) + \mathbf{x}_h(t) = e^{-t} \begin{bmatrix} -2 \\ 4 \end{bmatrix} + c_1\Big(\cos t \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} - \sin t \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \Big) + c_2\Big(\sin t \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} + \cos t \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \Big), \quad c_1, c_2 \in \mathbf{R}.$$

3. Määrää seuraavan autonomisen systeemin kriittiset pisteet ja niiden laatu:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= x(x - y + 1) \\ \dot{y}(t) &= y(3x - y - 1). \end{aligned}$$

Ratkaisu: Lasketaan kriittiset pisteet.

$$f(x,y) = x(x-y+1) = 0$$
$$g(x,y) = y(3x-y-1) = 0,$$

josta saadaan kriittisiksi pisteiksi $(0,0)$, $(0,-1)$, $(-1,0)$ ja $(1,2)$.
Koska $f, g \in C^1(\mathbf{R}^2)$, voidaan käyttää linearisointia ja soveltaa Poincarén lausetta:

$$A(x,y) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x-y+1 & -x \\ 3y & 3x-2y-1 \end{bmatrix}.$$

Siten

$$A(0,0) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad \det(A-\lambda I) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 \\ 0 & -1-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow \lambda = \pm 1.$$

Erimerkkiset. Siten Poincarén lauseen mukaan kriittinen piste $(0,0)$ on epästabiili.

$$A(0,-1) = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}, \quad \det(A-\lambda I) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 0 \\ -3 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)(1-\lambda) = 0 \Leftrightarrow \lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = 2.$$

Positiiviset. Siten kriittinen piste $(0,-1)$ on epästabiili.

$$A(-1,0) = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -4 \end{bmatrix}, \quad \det(A-\lambda I) = \begin{vmatrix} -1-\lambda & 1 \\ 0 & -4-\lambda \end{vmatrix} = (1+\lambda)(4+\lambda) = 0 \Leftrightarrow \lambda_1 = -1,\ \lambda_2 = -4.$$

Negatiiviset. Siten kriittinen piste $(-1,0)$ on asymptoottisesti stabiili.

$$A(1,2) = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 6 & -2 \end{bmatrix}, \quad \det(A-\lambda I) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 \\ 6 & -2-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2+\lambda+4 = 0 \Leftrightarrow \lambda = -1/2 \pm (1/2)i\sqrt{15}.$$

Kompleksiset, reaaliosa negatiivinen. Siten kriittinen piste $(1,2)$ on asymptoottisesti stabiili.

4. Tarkastellaan 1. kl. differentiaaliyhtälöä

$$y'(x)^2 + y(x)^2 = 1. \qquad (1)$$

(a) Anna kaksi (1):n ratkaisua, jotka kumpikin toteuttavat alkuehdon $y(\pi/4) = 0$.
(b) Olkoon $B = B((\pi/4, 0), 1/2) = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \mid (x-\pi/4)^2 + y^2 < 1/4\}$. Osoita, että alueessa B kulkee vain ne kaksi antamaasi AAT:n (1), $y(\pi/4) = 0$, ratkaisua.
(c) Onko (1):llä ratkaisua, joka toteuttaa (reuna)ehdot $y(-\pi/4) = 0$ ja $y(\pi) = 0$? Perustelu.

Ratkaisu: (a) Selvästi funktiot $y(x) = \pm\sin(x+a)$, vakio $a \in \mathbf{R}$, toteuttavat DY:n (1). Niistä funktiot $y_1(x) = \sin(x - \pi/4)$ ja $y_2(x) = -\sin(x - \pi/4)$ toteuttavat myös alkuehdon $y(\pi/4) = 0$.

(b) (1) määrittää kaksi normaalimuotoa

$$y'(x) = f(x,y) = \sqrt{1 - y(x)^2} \quad \text{ja} \quad y'(x) = g(x,y) = -\sqrt{1 - y(x)^2}. \tag{2}$$

Olkoon y yhtälön (1) ratkaisu. Pisteissä, joissa $y(x) \neq \pm 1$, se toteuttaa toisen ja vain toisen normaalimuodoista (2). Lisäksi $y'(x)$ ei voi vaihtaa merkkiä käymättä nollassa (jatkuvuus ja Bolzano). Siten, jos jollain välillä pätee $y(x) \neq \pm 1$, ratkaisu y toteuttaa tällä välillä vain toisen normaalimuodoista (2).
Pätee f, $\partial f/\partial y$, g, $\partial g/\partial y \in C(B)$, sillä $y(x) \neq \pm 1$ B:ssä. Siten lokaalin OY-lauseen mukaan alkuarvotehtävillä $y' = f(x,y)$, $y(\pi/4) = 0$ ja $y' = g(x,y)$, $y(\pi/4) = 0$ on kummallakin yksikäsitteisesti määrätty (maksimaali)ratkaisu B:ssä. Nämä ratkaisut ovat $y_1(x) = \sin(x - \pi/4)$ ja $y_2(x) = -\sin(x - \pi/4)$. Edellä esitetyn nojalla ne ovat ainoat (1):n ratkaisut B:ssä, jotka toteuttavat alkuehdon $y(\pi/4) = 0$.

(c) Kyllä on, funktio

$$y(x) = \begin{cases} \sin(x + \pi/4), & \text{kun } x \leq \pi/4, \\ 1, & \text{kun } \pi/4 < x \leq \pi/2, \\ \sin x, & \text{kun } x > \pi/2. \end{cases} \tag{3}$$

On helppo nähdä, että funktio (3) on derivoituva myös pisteissä $x = \pi/4$ ja $x = \pi/2$ (niissä $y'(x) = 0$) ja toteuttaa DY:n (1) (± 1 ovat tämän ratkaisuja) sekä reunaehdot $y(-\pi/4) = y(\pi) = 0$.

Huom. Ratkaisun liimaaminen eri paloista ratkaisuja, kuten (3):ssa, onnistuu reunalla $y = \pm 1$, jossa OY-lause ei ole enää voimassa (lokaali OY-lause on voimassa normaalimuodoille (2) alueessa $\mathbf{R} \times]-1, 1[$). Yhtälöllä (1) on tuhottomasti tällaisia paloista liimattuja ratkaisuja.

5. Tarkastellaan differentiaaliyhtälön alkuarvotehtävää

$$y'(x) = f(x,y) = x(\sin y + 1), \quad y(0) = 0.$$

Olkoon $y : I \to \mathbf{R}$ sen (maksimaali)ratkaisu.

(a) Osoita, että $I = \mathbf{R}$, ts. että ratkaisu y on olemassa välillä $\mathbf{R}$.

(b) Osoita, että ratkaisu y on rajoitettu funktio.

(c) Määrää (perustellusti) $\lim_{x\to\infty} y(x)$.

Ratkaisu: (a) Pätee $f \in C(\mathbf{R} \times \mathbf{R})$, ja $\partial f/\partial y = x \cos y$ on olemassa $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$:ssä. Olkoon $[a, b] \subset \mathbf{R}$. Silloin

$$\left|\frac{\partial f}{\partial y}\right| = |x \cos y| \leq |x| \leq \max\big(|a|, |b|\big) \quad \text{kaikilla } (x,y) \in [a,b] \times \mathbf{R}.$$

Globaalin OY-lauseen mukaan AAT:n (maksimaali)ratkaisu on määritelty koko $\mathbf{R}$:ssä, ts. $I = \mathbf{R}$.

(b) DY:n triviaaliratkaisut saadaan yhtälöstä

$$\sin y + 1 = 0 \Leftrightarrow \sin y = -1 \Leftrightarrow y = -\pi/2 + k \cdot 2\pi, \ k \in \mathbf{z}.$$

Trviaaliratkaisut ovat siis $y_k(x) \equiv -\pi/2 + k \cdot 2\pi, \ k \in \mathbf{z}$. Sekä lokaali että globaali OY-lause on voimassa koko $\mathbf{R}^2$:ssa. Yksikäsitteisyyspuolen mukaan AAT:n ratkaisu $y : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ ei kohtaa suoria $y = -\pi/2$ ja $y = 3\pi/2$. Koska $-\pi/2 < y(0) < 3\pi/2$, Bolzanon lauseen mukaan $-\pi/2 < y(x) < 3\pi/2$ kaikilla $x \in \mathbf{R}$.

(c) Todistetaan, että $y_\infty = \lim_{x\to\infty} y(x) = 3\pi/2$. Koska $y'(x) = x(\sin y(x) + 1) \geq 0$ kaikilla $x > 0$, funktio y on kasvava, ja kohdan (b) mukaan ylhäältä rajoitettuna sillä on raja-arvo $y_\infty = \lim_{x\to\infty} y(x)$. Lisäksi $0 = y(0) \leq y_\infty \leq 3\pi/2$.
Oletetaan, että $y_\infty < 3\pi/2$. Silloin $\sin y(x) \geq -1 + \epsilon$, $\epsilon > 0$, kaikilla $x > 0$, ja löytyy sellainen x_0, että $x(\sin y(x) + 1) \geq x\epsilon \geq 1$ kaikilla $x \geq x_0$. Siten

$$y(x) - y(x_0) = \int_{x_0}^{x} y'(t)\, dt = \int_{x_0}^{x} t(\sin t + 1)\, dt \geq \int_{x_0}^{x} 1\, dt = x - x_0,$$

joten

$$y(x) \geq y(x_0) - x_0 + x \to \infty, \quad \text{kun } x \to \infty,$$

mikä on ristiriidassa (b)-kohdassa todistetun kanssa. Saatu ristiriita osoittaa väitteen todeksi.

Huom. Kohdassa (c) voi käyttää myös kurssin DY I luvussa 2 esitettyä lemmaa.

Tehtävät 4 ja 5 arvostellaan kohdittain asteikolla: (a) 0-2, (b) 0-2 ja (c) 0-4. Yksittäisessä tehtävässä kuuden ylittäneet pisteet syötetään järjestelmään Kurki, sen nielemisvaikeuksien vuoksi, sijoittamalla ne keinotekoisesti muihin tehtäviin. Maksimipisteet ovat siis $4 \times 6 = 24$.