Differentiaaliyhtälöt II
Kertaustehtäviä, syksy 2009

Huom. Tehtävää 5 korjattu 10.12.
Joitakin tehtävistä käydään läpi viimeisellä luentotunnilla. Ei ole mielekästä antaa tässä ratkaisua tehtäviin 3, 4, 9 ja 10.

1. Ratkaise HS

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = A\mathbf{x}(t), \quad \mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3), \quad A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 4 \end{bmatrix},$$

ja määrää kriittisen pisteen $\mathbf{0}$ laatu. Ratk: $\mathbf{0}$ on epästabiili, yleinen ratkaisu on

$$\mathbf{x}(t) = c_1 e^t \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} + c_2 e^{-t} \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} + c_3 e^{4t} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -8 \end{bmatrix}.$$

2. Ratkaise HS

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = A\mathbf{x}(t), \quad \mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3), \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

ja määrää kriittisen pisteen $\mathbf{0}$ laatu. Ratk: $\mathbf{0}$ on epästabiili, yleinen ratkaisu on

$$\mathbf{x}(t) = c_1 e^t \begin{bmatrix} 4t^2 + t \\ 4t \\ 1 \end{bmatrix} + c_2 e^t \begin{bmatrix} 2t \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + c_3 e^t \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

3. Palauta seuraava DY 1. kl. normaalimuotoiseksi systeemiksi:

$$x^{(4)} + t\ddot{x} + t^2\dot{x} = 1.$$

Onko systeemi lineaarinen? Entä autonominen?

4. Osoita, että vektorifunktiot $\mathbf{x}_1(t) = [e^{-t} \;\; 1]^T$ ja $\mathbf{x}_2(t) = [-1 \;\; -(1/2)e^t]^T$ muodostavat välillä $\mathbf{R}$ perusjärjestelmän HS:lle

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = A(t)\mathbf{x}(t), \quad \mathbf{x} = (x_1, x_2), \quad A(t) = \begin{bmatrix} 1 & -2e^{-t} \\ e^t & -1 \end{bmatrix}.$$

5. Ratkaise lineaarinen systeemi

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} 2 & -4 \\ 1/4 & 2 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} 2 \\ 5t/2 + 11/2 \end{bmatrix}.$$

Ratk: $\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} 2t+3 \\ t+1 \end{bmatrix} + \mathbf{x}_h(t)$, jossa $\mathbf{x}_h(t)$ on vastaavan HS:n yleinen ratkaisu.

6. Ratkaise AAT

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \cos t & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ \sin t \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Ratk: $\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} -1 \\ -\sin t \end{bmatrix} + 2e^t \begin{bmatrix} 1 \\ \sin t \end{bmatrix} + e^t \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$

Ratkaise tehtävissä 7 ja 8 autonomisten systeemien kriittiset pisteet ja näiden laatu. Laske tehtävässä 7 myös radat.

7.

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -2y + 5 \\ \dot{y} &= 4x + 12. \end{aligned}$$

Ratk: $(-3, 2.5)$ stabiili, radat ovat se keskisiä ellipsejä $8(x+3)^2 + (5-2y)^2 = c$.

8.

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -x + xy - 6 \\ \dot{y} &= x - y. \end{aligned}$$

Ratk: $(3,3)$ epästabiili, $(-2,-2)$ asymptoottisesti stabiili.

9. Missä tason $\mathbf{R}^2$ alueissa seuraavat DY:t toteuttavat lokaalin OY-lauseen ehdot?

$$(a) \quad y' = \frac{\sin(xy)}{x-y}, \quad (b) \quad y' = \sqrt[5]{x-y}.$$

10. Osoita globaalin OY-lauseen avulla, että alkuarvotehtävällä

$$y'(x) = \frac{\sin y}{1-x^2}, \quad y(0) = y_0 \in \mathbf{R},$$

on yksikäsitteinen ratkaisu välillä $]-1,1[$.