

Differentiaaliyhtälöt II
Harjoitus 5, syksy 2009

Huom. Ratoja ei kannata yrittää laskea tehtävissä 2, 3 ja 4.

1. Määrää seuraavien autonomisten systeemien kriittiset pisteet ja niiden laatu (stabiili vai epästabiili):

$$(a) \quad \begin{aligned} \dot{x} &= y - 1 \\ \dot{y} &= -x + y + 5, \end{aligned} \quad (b) \quad \begin{aligned} \dot{x} &= -4x + 2y + 8 \\ \dot{y} &= x - 2y + 1. \end{aligned}$$

2. Autonomisella systeemillä

$$\begin{aligned} \dot{x} &= e^{x+y} - \cos x \\ \dot{y} &= \cos y + x - 1 \end{aligned}$$

on $\mathbf{0} = (0, 0)$ kriittisenä pisteenä. Määrää tämän laatu.

3. Määritä seuraavan autonomisen systeemin kriittiset pisteet ja niiden laatu:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= x^2 - y \\ \dot{y} &= 2 - x^2 - y^2. \end{aligned}$$

Luonnostele lisäksi virtauskuvio, erityisesti lähellä kriittisiä pisteitä. Voiko siitä selvästi nähdä kriittisten pisteiden laadun?

4. Epälineaarinen 2. kl. differentiaaliyhtälö

$$\ddot{x}(t) + (1 + x(t)^2)\dot{x}(t) + sx(t) = 0$$

riippuu parametrasta $s \in \mathbf{R}$. Muunna se kahden yhtälön 1. kl. systeemiksi ja tutki origon $\mathbf{0}$ stabiilisuutta tässä (autonomisessa) systeemissä, kun

$$(a) \quad s = 1, \quad (b) \quad s = 1/4, \quad (c) \quad s = -1.$$

5. Määrää seuraavan autonomisen systeemin kriittiset pisteet ja radat:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= (x + 1)(y - 2) \\ \dot{y} &= x^2 - x - 2. \end{aligned}$$

Mitä Poincarén lause kertoo kriittisten pisteiden laadusta? Luonnostele lisäksi virtauskuvio, lähinnä ratoja virtaussuuntineen. Kertooko se jotain kriittisten pisteiden laadusta?