Differentiaaliyhtälöt II
Harjoitus 4, syksy 2009

Tehtävät 4 ja 5 lasketaan kumpikin kahdeksi, kun harjoitusten suorituksia ynnätään (mutta tehtävien kokonaismäärään vain yhdeksi).

1. Takastellaan vakiokertoimista homogeenisysteeemiä $\mathbf{x}(t) = A\mathbf{x}(t)$, missä $A \in \mathbf{R}^{n\times n}$ ja $n = 2$ tai $n = 3$. Määrää sen kriittisen pisteen $\mathbf{0} \in \mathbf{R}^n$ laatu (stabiili vai epästabiili), kun

$$(a)\quad A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad (b)\quad A = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ -8 & 14 & -7 \end{bmatrix}, \quad (c)\quad A = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 8 & 1 \end{bmatrix}.$$

2. Ratkaise lineaarinen systeemi

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = A\mathbf{x}(t) + \mathbf{f}(t), \quad A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{f}(t) = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix},$$

käyttäen varioimiskeinoa. Mikä suora yrite johtaisi tulokseen helpommin?

3. Ratkaise lineaarinen systeemi

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = A\mathbf{x}(t) + \mathbf{f}(t), \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{f}(t) = \begin{bmatrix} -\cos t \\ -\sin t \end{bmatrix}.$$

Ohje. Suora yrite. Se johtaa 4×4-kokoiseen lineaariseen yhtälöryhmään.

4. Kahden kuulan ja kolmen jousen värähtelijässä päädyttiin 2. kl. homogeeniseen, vakiokertoimiseen systeemiin

$$\begin{aligned} m\ddot{x}_1 + 2kx_1 - kx_2 &= 0 \\ m\ddot{x}_2 - kx_1 + 2kx_2 &= 0, \end{aligned}$$

jossa $m, k > 0$ ovat vakioita. Ratkaise systeemi, mielellään matriisikeinolla.

5. Homogeenisysteemillä

$$\dot{\mathbf{z}}(t) = A(t)\mathbf{z}(t), \quad \text{jossa } A(t) = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1/t^2 & 1/t \end{bmatrix} \in \mathbf{R}^{2\times 2}, \ \mathbf{z}(t) = (x(t), y(t)) \in \mathbf{R}^2,$$

on välillä $I =]0, \infty[$ ratkaisu

$$\mathbf{z}_1(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ y_1(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Etsi systeemin perusjärjestelmä välillä I ja kirjoita yleinen ratkaisu.