Differentiaaliyhtälöt II
Harjoitus 2, syksy 2009

1. Laske kolme ensimmäistä Picardin approksimaatiota alkuarvotehtävälle

$$y' = \cos x, \quad y(\pi) = 0.$$

Huomaatko jotain erikoista, ja kuinka selität sen?

2. Palauta seuraavat skalaariyhtälöt 1. kl. systeemeiksi
(a) $y^{(3)} + \sin x\, y' + y = \cos x\,$,
(b) $y^{(4)} + x^2 y'' + x^4 y = \sin x\,$.

3. (a) Palauta seuraava systeemi normaalimuotoiseksi 1. kl. systeemiksi

$$\begin{aligned} \ddot{y} &= f(t, x, y, \dot{y}) \\ \dot{x} &= g(t, x, y). \end{aligned}$$

(b) Entä, jos ensimmäinen yhtälö kuuluukin

$$\ddot{y} = f(t, x, y, \dot{x}, \dot{y})?$$

4. Osoita, että $\big(\mathbf{x}_1(t), \mathbf{x}_2(t)\big) = \Big([2\ e^t]^T,\ [e^{-t}\ 1]^T\Big)$ on lineaarisen homogeenisysteemin

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} 1 & -2e^{-t} \\ e^t & -1 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t), \quad \mathbf{x} = (x_1, x_2),$$

perusjärjestelmä $\mathbf{R}$:ssä.

5. Ratkaise eliminointikeinolla seuraava lineaarinen homogeenisysteemi ja anna sen perusjärjestelmä $\mathbf{R}$:ssä

$$\mathbf{y}'(x) = \begin{bmatrix} -2 & 1/2 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} \mathbf{y}(x), \quad \mathbf{y} = (y_1, y_2).$$