Differentiaaliyhtälöt II

Harjoitus 1, syksy 2009 (viikko 46)

1. Määrää kolme ensimmäistä Picardin approksimaatiota AAT:lle

$$y' = -y, \quad y(0) = 2,$$

ja vertaa tarkkaan ratkaisuun.

2. Onko funktio $f(x, y) = e^{x+y}$ joukossa $I \times J$ tasaisesti Lipschitz-jatkuva muuttujan y suhteen, kun

(a) $I = [0, 1]$ ja $J = [0, 1]$,

(b) $I = [0, 1]$ ja $J = \mathbf{R}$,

(c) $I = \mathbf{R}$ ja $J = [0, 1]$?

Muutaman sanan vastaus riittää, ei tarvitse todistaa.

3. (a) Missä $\mathbf{R}^2$:n alueissa DY $y' = \sqrt[3]{y-1}$ toteuttaa lokaalin OY-lauseen ehdot (kun lauseessa sovelletaan lokaalia versiota Lipschitz-ehdosta)? Perustele lyhyesti ehtojen voimassaolo.

(b) Osoita, että $f(x, y) = \sqrt[3]{y-1}$ ei ole esimerkiksi suorakaiteessa $K = [0, 1] \times [0, 1]$ tasaisesti Lipschitz-jatkuva muuttujan y suhteen.

4. Olkoon funktio y AAT:n

$$y' = e^x \sin x \cos y, \quad y(0) = y_0 \in \mathbf{R},$$

(maksimaali)ratkaisu. Osoita globaalin OY-lauseen avulla, että y on määritelty koko $\mathbf{R}$:ssä.

5. Olkoon $y : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ edellisen tehtävän AAT:n ratkaisu. Osoita OY-lauseen avulla, lokaalin tai glogaalin, että y on rajoitettu funktio, ts. on olemassa sellainen vakio $M > 0$, että $|y(x)| \leq M$ kaikilla $x \in \mathbf{R}$.