DY II, syksyn 2009 luentovii(da)kkokirja

December 11, 2009

Tekstissä esiin tulevat sivunumerot sekä lauseiden, määritelmien ja yhtälöiden numerot viittaavat luentomonisteen numerointiin versiossa 9. lokakuuta 2008, siis siinä joka on kurssin kotisivulla. Monisteen painovirheet yritetään oikaista tässä päiväkirjassa. Yksi toistuva, tosin harmiton, virhe on jakoviivan puuttuminen. Esimerkiksi lukee

$$\begin{matrix}\partial M\\ \partial y\end{matrix}.$$

Parempi olisi, jos lukisi

$$\frac{\partial M}{\partial y}.$$

1 Viikko 45

Esitettiin pari alkuarvotehtävän $y' = f(x, y)$, $y(x_0) = y_0$, ratkaisun olessaoloa ja yksikäsitteisyyttä koskevaa lausetta, monisteen luku 4 s. 57-64. Tehtiin pari lisäystä ja muutosta:

Definition 1.1 (Lisäys määritelmään 4.2)**.** Olkoon $D \subset \mathbb{R}^2$ alue. Funktio $f : D \to \mathbb{R}$ toteuttaa D:ssä lokaalin Lipschitz-ehdon muuttujan y suhteen, jos jokaista $(x_0, y_0) \in D$ kohti löytyy sellaiset vakiot $h, k > 0$, että $K = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x-x_0| \leq h, |y-y_0| \leq k\} \subset D$ ja f on K:ssa tasaisesti Lipschitz-jatkuva y:n suhteen.

Theorem 1.2 (Lauseen 4.5 muunnos)**.** *Olkoon $D \subset \mathbb{R}^2$ alue ja f olkoon siinä määritelty funktio. Olkoon $\frac{\partial f}{\partial y}$ olemassa ja jatkuva D:ssä. Tällöin f toteuttaa D:ssä lokaalin Lipschitz-ehdon y:n suhteen.*

Proof. Differentiaalilaskennan väliarvolause ja tieto, että jatkuva funktio saavuttaa R^n:n rajoitetussa ja suljetussa (eli kompaktissa) osajoukossa maksiminsa ja miniminsä. Tässä erityisesti $\exists \max_{(x,y)\in K} |\partial f/\partial y| < \infty$.

□

Theorem 1.3 (Lokaali OY-lause)**.** *Olkoon $D \subset E \subset \mathbb{R}^2$, jossa D on alue. Olkoon funktio $f : E \to \mathbb{R}$ alueessa D jatkuva ja toteuttakoon se siinä lokaalin Lipschitz-ehdon muuttujan y suhteen. Olkoon $(x_0, y_0) \in D$.*

(a) Tällöin on olemassa sellainen $\delta > 0$, että alkuarvotehtävällä

$$y'(x) = f(x, y(x)), \quad y(x_0) = y_0, \qquad (4.1)$$

on ratkaisu $y : I \to \mathbb{R}$ välillä $I =]x_0 - \delta, x_0 + \delta[$.

(b) Olkoot $y_k : I_k \to \mathbb{R}$, $k = 1, 2$, kaksi AAT:n (4.1) ratkaisua, joiden kuvaajat kulkevat D:ssä: $(x, y_k(x)) \in D$ $\forall x \in I_k$, $k = 1, 2$. Tällöin

$$y_1(x) = y_2(x) \quad \forall x \in I_1 \cap I_2.$$

Proof. Globaalissa muodossa esitetty kohta (b) vaatii pieniä muutoksia monisteessa esitettyyn todistukseen. Ne ovat seuraavat:

Vaihe 5: Olkoot $y_k : I_k \to \mathbb{R}$, $k = 1, 2$, kaksi AAT:n (4.1) ratkaisua. Löytyy sellainen $\delta' > 0$, että $I' =]x_0 - \delta', x_0 + \delta'[\subset I_1 \cap I_2$ ja jatkuvuuden perusteella $(x, y_k(x)) \in K = \{(x, y) \,|\, |x - x_0| \leq h, |y - y_0| \leq k\}$ kaikilla $x \in I'$, $k = 1, 2$. Tähän ei siis suoralta kädeltä kelpaa todistuksessa aikaisemmin määritelty δ; jatkoarviot vaativat että kuvaajat pysyvät suorakaiteessa K. Bootstrap-arviointi johtaa tulokseen että $y_1(x) = y_2(x)$ kaikilla $x \in I'$.

Lisäaihe 6, globaali yksikäsitteisyys. Tehdään vastaoletus: Löytyy ellainen $x \in I_1 \cap I_2$, että $y_1(x) \neq y_2(x)$. Oletetaan että tämä $x > x_0$ (tapaus $x < x_0$ käsitellään vastaavasti). Silloin on olemassa

$$x_1 = \inf\{x \in I_1 \cap I_2 \,|\, y_1(x) \neq y_2(x), x > x_0\}, \qquad (4.2)$$

sillä kyseinen joukko on epätyhjä ja alhaalta rajoitettu x_0:lla. Koska $y_1(x) = y_2(x)$ kaikilla $x \in [x_0, x_1[$, ja funktiot ovat jatkuvia, niin $y_1(x_1) = y_2(x_1)$. Siten y_1 ja y_2 ovat AAT:n

$$y' = f(x, y), \quad y(x_1) = y_1(x_1) = y_2(x_1),$$

ratkaisuja. Koska oletuksen mukaan $(x_1, y_1(x_1)) \in D$, vaiheen 5 mukaan löytyy sellainen $\delta' > 0$, että $y_1(x) = y_2(x)$ kaikilla $x \in]x_0 - \delta', x_0 + \delta'[$, mikä on vastoin x_1:n valintaa (4.2). Saatu ristiriita osoittaa, että

$$y_1(x) = y_2(x) \quad \text{kaikilla } x \in I_1 \cap I_2.$$

□

Huom. Kurssissa Differentiaalilaskenta I esitetty OY-lause (Theorem 1.1) seuraa teoreemoista 1.2 ja 1.3 (tämän tekstin numeroinnit).

Theorem 1.4 (OY-lauseen globaali muoto)**.** *Olkoon $I \subset \mathbb{R}$ väli (voi olla rajoittamatonkin). Olkoon funktio $f : I \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jatkuva, ja lisäksi kaikilla (kompakteilla) $[a, b] \subset I$ se olkoon suorakaiteessa $[a, b] \times \mathbb{R}$ tasaisesti Lipschitz-jatkuva muuttujan y suhteen. Olkoon $(x_0, y_0) \in I \times \mathbb{R}$. Tällöin alkuarvoethtävällä*

$$y' = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0, \qquad (4.1)$$

on koko välillä I määritelty ratkaisu $y : I \to \mathbb{R}$. Se on yksikäsitteisesti määrätty.

Huom. 1. Lineaarinen yhtälö (tai systeemi) toteuttaa globaalin OY-lauseen ehdot, jos sen kerroinfunktiot ovat jatkuvia kyseisellä välillä I. Tästä seuraa lineaarisille yhtälöille ratkaisun globaalisuus.

Huom. 2. Tässä luvussa esitetyt OY-lauseet pätevät pienin säädöin myös differentiaaliyhtälösysteemeille (joita tutkitaan seuraavassa luvussa).

Esimerkki. Tarkastellaan yhtälöä

$$y' = f(x, y) = \frac{y^3 e^x}{1 + y^2} + x^2 \sin y. \qquad (1)$$

Selvästi f ja $\partial f/\partial y \in C(\mathbb{R}^2)$. Enemmänkin, olkoon $a > 0$. Silloin

$$\left|\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right| \leq 3e^a + a^2 \quad \text{kaikilla } (x,y) \in [-a,a] \times \mathbb{R}.$$

Siten väliarvolauseen nojalla f on joukossa $[-a,a] \times \mathbb{R}$ tasaisesti Lipschitz-jatkuva y:n suhteen (L-vakioksi kelpaa $M = 3e^a + a^2$). Koska tämä pätee kaikilla $a > 0$, niin (1) toteuttaa globaalin OY-lauseen ehdot alueessa $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ (siis $I = \mathbb{R}$). Jos $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$, kyseisen lauseen mukaan AAT:llä (1), $y(x_0) = y_0$, on koko $\mathbb{R}$:ssä määritelty ratkaisu $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Siis (1):n kaikki ratkaisut on määritelty koko $\mathbb{R}$:ssä.

2 Viikko 46

Vietiin loppuun teoreemojen 1.3 ja 1.4 todistukset.

Teoreeman 1.4 todistus. Tarvitsee muuttaa vain vähän teoreeman 1.3 todistusta. Vaiheeseen 1 ei tule muutoksia.

Vaihe 2: Suorakaiteeksi voidaan valita

$$K = [a,b] \times \mathbb{R} \subset I \times \mathbb{R}.$$

Picardin approksimaatiot y_n määritellään välillä $[a,b]$. Koska K on y:n suhteen rajoittamaton, pätee itsestään että $(x, y_n(x)) \in K$ kaikilla $x \in [a,b]$ ja $n \in \mathbb{N}$.

Vaihe 3: Arviossa (4.4) (monisteen numero) $\|f\|$ korvataan luvulla $\max_{x\in[a,b]} |f(x,y_0)| < \infty$. Lisäksi δ korvataan vakiossa a_n, ja jatkossa aina kun esiintyy, luvulla $b-a$. Muuten vaihe 3 ja loputkin säilyvät ennallaan. Siten AAT:llä (4.1) on ratkaisu $y : [a,b] \to \mathbb{R}$.

Olkoon sitten $[a_i, b_i] \subset I$, $i = 1, 2, ...$, kasvava jono välejä, joille pätee

$$I = \bigcup_{i=1}^{\infty} [a_i, b_i].$$

Alkuosan perusteella AAT:llä (4.1) on ratkaisut $y_i : [a_i, b_i] \to \mathbb{R}$. Yksikäsitteisyyden nojalla (teoreema 1.3 (b)) pätee $y_i(x) = y_j(x)$ kaikilla $x \in [a_j, b_j]$ ja $i \geq j$. Voidaan siis määritellä funktio $y : I \to \mathbb{R}$ hyvin asettamalla

$$y(x) = y_i(x) \quad \text{aina, kun } x \in [a_i, b_i].$$

Silloin y on derivoituva ja selvästi toteuttaa DY:n $y' = f(x,y)$ kaikissa pisteissä $x \in I$ (y on jossain x:n ympäristössä jokin y_i). Luonnollisesti myös alkuehto $y(x_0) = y_0$ toteutuu. On siis muodostettu AAT:n (4.1) globaali ratkaisu.

$\square$

Monisteen luvuista 5 ja 6, Systeemit ja Lineaariset systeemit, käsiteltiin vain joitakin sivuja (65 ja 73-74). Systeemeihin johdattava esimerkki, jossa sovelletaan nk. eliminointikeinoa:

Kahden säiliön sekoitusongelma. Olkoot 24 litraa vetävät säiliöt A ja B täynnä suolavettä, ja olkoot niiden väliset virtaukset sekä virtaukset systeemistä pois ja sisään seuraavat: Säiliöön A virtaa systeemin ulkopuolelta nopeudella 6 l/min suolavettä, jonka pitoisuus on a g/l. A:sta B:hen liuosta virtaa nopeudella 8l/min ja B:stä A:han takaisin nopeudella

2l/min. Lisäksi B:stä virtaa systeemin ulkopuolelle liusta nopeudella 6 l/min (siten liuosmäärät pysyvät vakioina). Jokaisessa vaiheessa suola sekoittuu täydellisesti. Tarkastellaan suolan määriä (grammoina) A:ssa ja B:ssä ajan t funktioina $x(t)$ ja $y(t)$. Alkuhetkellä $t = 0$ määrät olkoot $x(0) = x_0$ ja $y(0) = y_0$ (grammaa).

Funktio $x(t)$ muutosnopeus eli derivaatta on (ei välitetä yksiköstä g/min)

$$\dot{x}(t) = 6a - 8\frac{x(t)}{24} + 2\frac{y(t)}{24}.$$

Vastaavasti funktion $y(t)$ muutosnopeus on

$$\dot{y}(t) = 8\frac{x(t)}{24} - 2\frac{y(t)}{24} - 6\frac{y(t)}{24}.$$

Saadaan 1. kl. differentiaaliyhtälöryhmä

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= -\frac{1}{3}x(t) + \frac{1}{12}y(t) + 6a \qquad &(1a)\\ \dot{y}(t) &= \frac{1}{3}x(t) - \frac{1}{3}y(t). \qquad &(1b) \end{aligned}$$

Se on lineaarinen. Alkuehto on

$$x(0) = x_0 \quad \text{ja} \quad y(0) = y_0. \qquad (2)$$

Ratkaistaan AAT (1) ja (2) käyttäen nk. eliminointikeinoa (tee itsellesi selväksi sen logiikka):

Derivoidaan (1a) ja sijoitetaan saatuun yhtälöön (1b):

$$\ddot{x} = -\frac{1}{3}\dot{x} + \frac{1}{12}\dot{y} = -\frac{1}{3}\dot{x} + \frac{1}{36}x - \frac{1}{36}y. \qquad (3)$$

Yhtälöstä (1a) saadaan $y = 12\dot{x} + 4x - 72a$. Sijoitetaan tämä yhtälöön (3), jolloin y eliminoituu pois, ja saadaan

$$\ddot{x} = -\frac{1}{3}\dot{x} + \frac{1}{36}x - \frac{1}{3}\dot{x} - \frac{1}{9}x + 2a \Leftrightarrow 12\ddot{x} + 8\dot{x} + x = 24a, \qquad (4)$$

2.kl. lineaarinen, vakiokertoiminen DY. Vastaava HY: $12\ddot{x} + 8\dot{x} + x = 0$, sen kar. yht. $12r^2 + 8r + 1 = 0 \Leftrightarrow r_1 = -1/6,\ r_2 = -1/2$. Siten HY:n perusjärjestelmä (pj.) on $\left(e^{-t/2}, e^{-t/6}\right)$. Yhtälöllä (4) on selvästi yksittäisratkaisu $x_p(t) \equiv 24a$. Siten sen yleinen ratkaisu on

$$x(t) = 24a + c_1e^{-t/2} + c_2e^{-t/6}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R},$$

jonka derivaatta (tulevaa varten) on $\dot{x}(t) = -(c_1/2)e^{-t/2} - (c_2/6)e^{-t/6}$.

Kun $x(t)$ on nyt saatu, funktio $y(t)$ pitää ratkaista yhtälöstä (1a), ei esimerkiksi yhtälöstä (1b). Saadaan

$$y(t) = 12\dot{x} + 4x - 72a = 24a - 2c_1e^{-t/2} + 2c_2e^{-t/6}.$$

Erityisesti systeemillä (1) on vakioratkaisu $x \equiv y \equiv 24a$, joka on stabiili tila, kuten tulemme myöhemmin nimeämään. Huomaa, että kaikki ratkaisut ajan myötä lähestyvät tätä stabiilia tilaa.

Alkuehto (2): $x_0 = x(0) = 24a + c_1 + c_2$ ja $y_0 = y(0) = 24a - 2c_1 + 2c_2$, joista saadaan $c_1 = (1/4)(2x_0 - y_0 - 24a)$ ja $c_2 = (1/4)(2x_0 + y_0 - 72a)$. Siten AAT:n (1) ja (2) ratkaisu on

$$\begin{aligned} x(t) &= 24a + \frac{1}{4}(2x_0 - y_0 - 24a)e^{-t/2} + \frac{1}{4}(2x_0 + y_0 - 72a)e^{-t/6} \to 24a,\ t \to \infty, \\ y(t) &= 24a - \frac{1}{2}(2x_0 - y_0 - 24a)e^{-t/2} + \frac{1}{2}(2x_0 + y_0 - 72a)e^{-t/6} \to 24a,\ t \to \infty. \end{aligned}$$

Siten suolapitoisuuksille pätee

$$p_A(t) = \frac{x(t)}{24} \to a \text{ (g/l)} \quad \text{ja} \quad p_B = \frac{y(t)}{24} \to a, \quad \text{kun } t \to \infty.$$

3 Viikko 47

Huom. Harjoituksen 3 tehtävään 5 tehtiin 17.11. pieni muutos: matriisi kerrottiin -1:llä.

Käsiteltiin skalaariyhtälön palauttaminen 1. kl. mormaalimuotoiseksi systeemiksi s. 66-67: Kertalukua n oleva (normaalimuotoinen) DY

$$y^{(n)} = f\big(x, y, y', \cdots, y^{(n-1)}\big)$$

palautuu sijoituksella

$$\begin{cases} y_1(x) = y(x) \\ y_2(x) = y'(x) \\ \vdots \\ y_n(x) = y^{(n-1)}(x) \end{cases}$$

yhtäpitäväksi 1. kl. normaalimuotoiseksi systeemiksi

$$\begin{cases} y_1'(x) = y_2(x) \\ y_2'(x) = y_3(x) \\ \vdots \\ y_{n-1}'(x) = y_n(x) \\ y_n'(x) = f(x, y_1, y_2, \cdots, y_n). \end{cases} \qquad (*)$$

Erityisesti, jos skalaariyhtälö on lineaarinen,

$$y^{(n)} + a_n(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_2(x)y' + a_1(x)y = b(x),$$

niin systeemin $(*)$ viimeinen yhtälö kuuluu

$$y_n'(x) = -\sum_{k=1}^{n} a_k(x)y_k(x) + b(x).$$

Siten lineaarinen yhtälö palautuu lineaariseksi systeemiksi. Jos merkitään $\mathbf{z}(x) = (y_1(x), \cdots, y_n(x)) \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{f}(x) = (0, \cdots, 0, b(x)) \in \mathbb{R}^n$ ja

$$A(x) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_1(x) & -a_2(x) & -a_3(x) & \cdots & -a_n(x) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n\times n},$$

niin saatu lineaarinen systeemi voidaan kirjoittaa

$$\mathbf{z}'(x) = A(x)\mathbf{z}(x) + \mathbf{f}(x).$$

Käsiteltiin lineaarisen homogeenisysteemin (HS) perusteoria s. 74-78:

Definition 3.1 (Määritelmä 6.3)**.** Olkoot $A(t) \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $\mathbf{x}(t) \in \mathbb{R}^n$. Jono $\big(\mathbf{x}_1(t), \cdots, \mathbf{x}_n(t)\big)$ vektorifunktioita $\mathbf{x}_k(t) = \big(x_{1,k}(t), \cdots, x_{n,k}(t)\big) \in \mathbb{R}^n$ on homogeenisysteemin

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = A(t)\mathbf{x}(t) \qquad (6.3)$$

perusjärjestelmä (pj.) välillä $I \subset \mathbb{R}$, jos

(1) funktiot $\mathbf{x}_k(t)$ ovat systeemin (6.3) ratkaisuja välillä I,

(2) jokainen (6.3):n ratkaisu $\mathbf{x}(t)$ välillä I voidaan kirjoittaa lineaarikombinaationa

$$\mathbf{x}(t) = c_1\mathbf{x}_1(t) + \cdots + c_n\mathbf{x}_n(t) \quad \text{kaikilla } t \in I,\ c_k \in \mathbb{R}, 1 \le k \le n. \qquad (6.4)$$

Vektorifunktiot $\mathbf{x}_k(t) \in \mathbb{R}^n$, $1 \le k \le n$, määrittelevät matriisifunktion

$$X(t) = [\mathbf{x}_1(t) \ \cdots \ \mathbf{x}_n(t)] = \begin{bmatrix} x_{1,1}(t) & \cdots & x_{1,n}(t) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n,1}(t) & \cdots & x_{n,n}(t) \end{bmatrix}.$$

Jos merkitään $\mathbf{c} = (c_1, \cdots, c_n) \in \mathbb{R}^n$, vektoriyhtälö (6.4) voidaan kirjoittaa matriisimuodossa $\mathbf{x}(t) = X(t)\mathbf{c}$. Jos $\big(\mathbf{x}_1(t), \cdots, \mathbf{x}_n(t)\big)$ on HS:n perusjärjestelmä, matriisia $X(t)$ kutsutaan HS:n *perusmatriisiksi.*

Theorem 3.2 (Lause 6.A)**.** *Jos $A(t)$ on jatkuva välillä $I \subset \mathbb{R}$, homogeenisysteemillä (6.3) on perusjärjestelmä välillä I.*

Proof. Samoin kuin kurssin DY I vastaava lause 3.A. □

Definition 3.3 (Määritelmä 6.4)**.** Vektoriarvoisten funktioiden $\mathbf{x}_k(t) \in \mathbb{R}^n$, $1 \le k \le n$, *Wronskin determinantti* pisteessä t on

$$W(\mathbf{x}_1, \cdots, \mathbf{x}_n)(t) = \det X(t) = \begin{vmatrix} x_{1,1}(t) & \cdots & x_{1,n}(t) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n,1}(t) & \cdots & x_{n,n}(t) \end{vmatrix}.$$

Theorem 3.4 (Lause 6.6)**.** *Olkoot $A(t) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ja $\mathbf{x}(t) \in \mathbb{R}^n$. Vektorifunktiot $\mathbf{x}_k(t) \in \mathbb{R}^n$, $1 \le k \le n$, muodostavat HS:n (6.3) perusjärjestelmän välillä I tasan silloin, kun ne toteuttavat seuraavat ehdot:*

(1) funktiot $\mathbf{x}_k(t)$ ovat HS:n (6.3) ratkaisuja välillä I,

(2) $W(\mathbf{x}_1, \cdots, \mathbf{x}_n)(t_0) \neq 0$ jollakin $t_0 \in I$.

Proof. Samoin kuin kurssin DY I lause 3.6 (kts. luentopäiväkirja). □

Corollary 3.5. *Olkoot vektorifunktiot* $\mathbf{x}_k(t)$*,* $1 \le k \le n$*, HS:n (6.3) ratkaisuja välillä* I*. Silloin pätee joko*

$$W(\mathbf{x}_1, \cdots, \mathbf{x}_n)(t) \neq 0 \quad \textit{kaikilla } t \in I \ (\textit{kun } (\mathbf{x}_1, \cdots, \mathbf{x}_n) \textit{ on pj.) tai}$$
$$W(\mathbf{x}_1, \cdots, \mathbf{x}_n)(t) = 0 \quad \textit{kaikilla } t \in I \ (\textit{kun } (\mathbf{x}_1, \cdots, \mathbf{x}_n) \textit{ ei ole pj.).}$$

Vakiokertoimisista homogeenisysteemeistä ehdittiin käsitellä luvun 6.3 sivut 79- 80. Merkintä $\mathbf{0} = (0, 0, \cdots, 0) \in \mathbb{R}^n$. Samalla ruvettiin tutkimaan intuitiivisesti, onko HS:n vakioratkaisu $\mathbf{x}(t) \equiv \mathbf{0}$ stabiili vai epästabiili tasapainotila (a stable or unstable equilibrium solution).

Esimerkki. Ratkaistaan seuraava vakiokertoiminen homogeenisysteemi eliminointikeinolla:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= 4x(t) - 4z(t) && (1a) \\ \dot{y}(t) &= 4y(t) - 2z(t) && (1b) \\ \dot{z}(t) &= -2x(t) - 4y(t) + 4z(t). && (1c) \end{aligned}$$

Korvaten derivaatat $\dot{y}$ ja $\dot{z}$ yhtälöiden (1b) ja (1c) mukaisesti derivoimalla saadaan

$$(1a) \Rightarrow \ddot{x} = 4\dot{x} - 4\dot{z} = 4\dot{x} + 8x + 16y - 16z \Leftrightarrow \ddot{x} - 4\dot{x} - 8x = 16y - 16z, \qquad (2)$$

$$\begin{aligned} (2) \Rightarrow x^{(3)} - 4\ddot{x} - 8\dot{x} &= 16\dot{y} - 16\dot{z} = 62y - 32z + 32x + 64y - 64z \\ \Leftrightarrow x^{(3)} - 4\ddot{x} - 8\dot{x} - 32x &= 128y - 96z. \end{aligned} \qquad (3)$$

Systeemi (1) ratkaistaan sen kanssa yhtäpitävästä systeemistä (1a), (2), (3), johon on päädytty derivoimalla yhtälöä (1a)! Ratkaistaan ensin y ja z parista (1a), (2):

$$\begin{aligned} 4z &= -\dot{x} + 4x && (1a) \\ 16y - 16z &= \ddot{x} - 4\dot{x} - 8x. && (2) \end{aligned}$$

Saadaan

$$y = \frac{1}{16}(\ddot{x} - 8\dot{x} + 8x), \quad z = -\frac{1}{4}\dot{x} + x. \qquad (4)$$

Sijoitetaan nämä yhtälöön (3), jolloin x:lle saadaan 3. kl. vakiokertoiminen HY

$$\begin{aligned} & x^{(3)} - 4\ddot{x} - 8\dot{x} - 32x = 8\ddot{x} - 64\dot{x} + 64x + 24\dot{x} - 96x \\ & \Leftrightarrow x^{(3)} - 12\ddot{x} + 32\dot{x} = 0. \end{aligned} \qquad (5)$$

Sen karakteristinen yhtälö on

$$r^3 - 12r^2 + 32r = r(r^2 - 12r + 32) = 0 \Leftrightarrow r_1 = 0,\ r_2 = 4,\ r_3 = 8.$$

Siten (5):n yleinen ratkaisu on (huomaa, että $e^{r_1 t} \equiv 1$)

$$x(t) = c_1 + c_2 e^{4t} + c_3 e^{8t}, \quad c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}.$$

Funktiot y ja z saadaan sitten (4):stä:

$$\begin{aligned} y(t) &= \frac{1}{2}c_1 - \frac{1}{2}c_2 e^{4t} + \frac{1}{2}c_3 e^{8t}, \\ z(t) &= c_1 - c_3 e^{8t}. \end{aligned}$$

Siten systeemin (1) yleinen ratkaisu on

$$\begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{bmatrix} = c_1 \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} + c_2 e^{4t} \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} + c_3 e^{8t} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}, \quad c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}. \qquad (6)$$

Systeemillä (1) on vakioratkaisu $x(t) \equiv y(t) \equiv z(t) \equiv 0$ (vastaten parametreja $c_1 = c_2 = c_3 = 0$). Kaikilla $c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$, joilla $c_2 \neq 0$ tai $c_3 \neq 0$, selvästi pätee

$$\|(x(t), y(t), z(t))\| = \sqrt{x(t)^2 + y(t)^2 + z(t)^2} \to \infty, \quad \text{kun } t \to \infty,$$

siis ratkaisu loittonee $\mathbf{0}$:sta. Sanotaan, että tasapainotila $x(t) \equiv y(t) \equiv z(t) \equiv 0$ on *epästabiili.*

Definition 3.6. Vektorien $\mathbf{u}_1, \cdots, \mathbf{u}_k \in \mathbb{R}^n$ tai $\in \mathbb{C}^n$, $k \leq n$, jono on *vapaa* eli vektorit ovat *lineaarisesti riippumattomia*, jos vektoriyhtälöllä

$$c_1\mathbf{u}_1 + \cdots + c_k\mathbf{u}_k = \mathbf{0}$$

on vain triviaaliratkaisu $c_1 = \cdots = c_k = 0$.

Theorem 3.7 (Lause 6.12)**.** *Jos matriisin $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ominaisarvot $\lambda_1, \cdots, \lambda_k \in \mathbb{R}^n$ tai $\in \mathbb{C}^n$, $k \leq n$, ovat erilliset, niitä vastaavat ominaisvektorit $\mathbf{u}_1, \cdots, \mathbf{u}_k \in \mathbb{R}^n$ tai $\in \mathbb{C}^n$ ovat lineaarisesti riippumattomia.*

Proof. Todistus induktiolla k:n suhteen. Jos $k = 1$, asia on sevä, sillä ominaisvektorina $\mathbf{u}_1 \neq \mathbf{0}$ ja siten $c_1\mathbf{u}_1 = \mathbf{0} \Rightarrow c_1 = 0$. Oletetaan, että väite pätee jollakin $k < n$. Indeksinä olkoon siis $k + 1$: Tarkastellaan vektoriyhtälöä

$$\sum_{i=1}^{k+1} c_i\mathbf{u}_i = \mathbf{0}. \qquad (1)$$

Koska $\mathbf{u}_i$:t ovat ominaisarvoihin λ_i liittyviä omimaisvektoreita, kertomalla (1) matriisilla A saadaan

$$\mathbf{0} = \sum_{i=1}^{k+1} c_i A\mathbf{u}_i = \sum_{i=1}^{k+1} \lambda_i c_i \mathbf{u}_i. \qquad (2)$$

Kertomalla (1) luvulla $-\lambda_{k+1}$ ja laskemalla (2):n kanssa yhteen saadaan

$$\sum_{i=1}^{k} (\lambda_i - \lambda_{k+1})c_i\mathbf{u}_i = \mathbf{0}, \qquad (3)$$

joten induktio-oletuksen mukaan $(\lambda_i - \lambda_{k+1})c_i = 0$ kaikilla $1 \leq i \leq k$. Koska ominaisarvot ovat erilliset, ts. $\lambda_i \neq \lambda_{k+1}$ kaikilla $1 \leq i \leq k$, niin pätee $c_i = 0$ kaikilla $1 \leq i \leq k$. Sijoitetaan nämä arvot yhtälöön (1), jolloin saadaan $c_{k+1}\mathbf{u}_{k+1} = \mathbf{0} \Rightarrow c_{k+1} = 0$. Siten (1):llä on vain triviaaliratkaisu $c_1 = \cdots = c_{k+1} = 0$, ja induktiotodistus on valmis. □

4 Viikko 48

Huom. Kurssikokeeseen 15.12. saa ottaa mukaan yhden liuskan (A4-kokoisen) "lunttilapun", mieleisensä tiivistelmän kurssin keskeisistä asioista. Sama koskee tulevia erilliskokeita niin DY I:ssä kuin II:ssa, jotka allekirjoittanut laatii.

Lasse Lamberg

Käsiteltiin vakiokertoimiset homogeenisysteemit loppuun, s. 81-85. Luentojen sivulla 84 on harmillisia painovirheitä, jotka tekevät lauseet mielettömiksi. Melko lopussa ensimmäistä kappaletta pitäisi lukea: Havaitaan edelleen, että $A\mathbf{u} = \lambda\mathbf{u}$ jos ja vain jos $A\mathbf{u}^* = \lambda^*\mathbf{u}^*$. Siis jos $\mathbf{u}$ on ominaisarvoa λ vastaava ominaisvektori, niin $\mathbf{u}^*$ vastaa ominaisarvoa λ^*. Pieniä muutoksia sivujen 84-85 tarkasteluihin:

Saadaan homogeenisysteemin $\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x}$ kompleksiarvoiset ratkaisut

$$\begin{aligned}\mathbf{w}_1(t) &= e^{\lambda_1 t}\mathbf{u}_1 = e^{\alpha t}\big((\mathbf{a}\cos\beta t - \mathbf{b}\sin\beta t) + i(\mathbf{a}\sin\beta t + \mathbf{b}\cos\beta t)\big),\\ \mathbf{w}_2(t) &= e^{\lambda_2 t}\mathbf{u}_2 = e^{\alpha t}\big((\mathbf{a}\cos\beta t - \mathbf{b}\sin\beta t) - i(\mathbf{a}\sin\beta t + \mathbf{b}\cos\beta t)\big),\end{aligned}$$

joista superpositioperiaatetta soveltaen saadaan reaaliratkaisut

$$\begin{aligned}\mathbf{x}_1(t) &= \frac{1}{2}(\mathbf{w}_1(t) + \mathbf{w}_2(t)) = e^{\alpha t}(\mathbf{a}\cos\beta t - \mathbf{b}\sin\beta t),\\ \mathbf{x}_2(t) &= \frac{1}{2i}(\mathbf{w}_1(t) - \mathbf{w}_2(t)) = e^{\alpha t}(\mathbf{a}\sin\beta t + \mathbf{b}\cos\beta t).\end{aligned} \tag{1}$$

Theorem 4.1 (Lause 6.16-17). *Olkoon matriisilla $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ominaisarvot $\lambda_1 = \alpha + i\beta$ ja $\lambda_2 = \alpha - i\beta \in \mathbb{C}$, $\beta \neq 0$, ja olkoot niitä vastaavat ominaisvektorit $\mathbf{u}_1 = \mathbf{a} + i\mathbf{b}$ sekä $\mathbf{u}_2 = \mathbf{a} - i\mathbf{b} \in \mathbb{C}^n$. Tällöin homogeenisysteemillä $\dot{\mathbf{x}}(t) = A\mathbf{x}(t)$ on reaaliratkaisut (1). Olkoot lisäksi muiden ominaisarvojen ja -vektorien määrittelemät ratkaisut $\mathbf{x}_k(t)$, $k > 2$. Tällöin vectorit $\mathbf{x}_k(0)$, $k \geq 1$, ovat lineaarisesti riippumattomia.*

Proof. Edellä jo selvisi, että funktiot (1) ovat HS:n reaaliratkaisuja. Todistetaan vielä riippumattomuus. Tarkastellaan lineaarikombinaatiota

$$c_1\mathbf{x}_1(0) + c_2\mathbf{x}_2(0) + \sum_{k>2} c_k\mathbf{x}_k(0) = \frac{1}{2}(c_1 - ic_2)\mathbf{w}_1(0) + \frac{1}{2}(c_1 + ic_2)\mathbf{w}_2(0) + \sum_{k>2} c_k\mathbf{x}_k(0) = \mathbf{0}.$$

Lauseen 6.12 mukaan pätee $c_1 - ic_2 = c_1 + ic_2 = 0 \Leftrightarrow c_1 = c_2 = 0$. Vastaavasti $c_k = 0$ kaikilla $k > 0$. □

Käsiteltiin epähomogeeniset lineaariset systeemit s. 86-87. Pari pientä lisäystä: Lineaarinen epähomogeenisysteemi (EHS) kuuluu

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = A\mathbf{x}(t) + \mathbf{f}(t), \qquad (6.8)$$

jossa $A(t) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ja $\mathbf{x}(t)$, $\mathbf{f}(t) \in \mathbb{R}^n$. Vastaava HS on $\dot{\mathbf{x}}(t) = A\mathbf{x}(t)$.

Theorem 4.2 (Lause 6.B)**.** *Olkoon $\mathbf{x}_p(t)$ EHS:n (6.8) yksittäiratkaisu, ja olkoon vastaavan HS:n perusjärjestelmä $\mathbf{x}_k(t)$, $1 \le k \le n$. Tällöin EHS:n (6.8) yleinen ratkaisu on*

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}_p(t) + \sum_{k=1}^{n} c_k \mathbf{x}_k(t), \quad c_1, \cdots, c_n \in \mathbb{R},$$

siis EHS:n yksittäsratkaisu+HS:n yleinen ratkaisu.

Proof. Samoin kuin kurssin DY I lause 1.2.1. □

EHS:n yksittäisratkaisu voidaan etsiä, paitsi variointikeinolla, myös suoralla yritteellä, mikä on kevyempi toteuttaa varsinkin, jos $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ on vakiomatriisi. Tarkastellaan asiaa muutaman esimerkin valossa.

Esimerkki. Ratkaistaan EHS

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = A\mathbf{x}(t) + \mathbf{f}(t), \quad A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{f}(t) = t\mathbf{g} = t\begin{bmatrix} -9 \\ 0 \\ -18 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -9t \\ 0 \\ -18t \end{bmatrix}. \qquad (1)$$

Vastaava HS $\dot{\mathbf{x}}(t) = A\mathbf{x}(t)$ ensin. Se on jo ratkaistu esimerkissä 6.15, ja sen yleiseksi ratkaisuksi saatiin

$$\mathbf{x}_h(t) = c_1 e^{3t}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + c_2 e^{3t}\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + c_3 e^{-3t}\begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}.$$

EHS:n (1) yksittäisratkaisu: Koska $\mathbf{f}(t)$ koostuu 1. asteen polynomeista, sopiva suoran yritteen muoto on

$$\mathbf{x}(t) = t\mathbf{a} + \mathbf{b}, \quad \mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3),\ \mathbf{b} = (b_1, b_2, b_3) \in \mathbb{R}^3,$$

jolloin $\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{a}$, $A\mathbf{x}(t) = tA\mathbf{a} + A\mathbf{b}$ ja saadaan (lineaarinen 6×6 yhtälöryhmä)

$$(1) \Leftrightarrow \mathbf{a} = tA\mathbf{a} + A\mathbf{b} + t\mathbf{g} \quad \text{kaikilla } t \Leftrightarrow A\mathbf{a} = -\mathbf{g},\ A\mathbf{b} = \mathbf{a} \Leftrightarrow \mathbf{a} = \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix},\ \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Siten systeemillä (1) on yksittäisratkaisu

$$\mathbf{x}_p(t) = t\mathbf{a} + \mathbf{b} = t\begin{bmatrix} 5 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix},$$

ja sen yleinen ratkaisu on $\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}_p(t) + \mathbf{x}_h(t)$.

Esimerkki. Muuten sama kuin edellinen, mutta

$$\mathbf{f}(t) = \begin{bmatrix} \sin t \\ t \\ 1 \end{bmatrix} = t\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \sin t\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Superpositioperiaatteen mukaan sopiva yritteen muoto on

$$\mathbf{x}(t) = t\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c}\sin t + \mathbf{d}\cos t, \quad \mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d} \in \mathbb{R}^3.$$

Vastaavasti, jos

$$\mathbf{f}(t) = \begin{bmatrix} t^2 \\ e^t \\ e^{-t} \end{bmatrix} = t^2 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + e^{-t} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + e^t \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix},$$

sopiva yritteen muoto on

$$\mathbf{x}(t) = t^2\mathbf{a} + t\mathbf{b} + \mathbf{c} + e^t\mathbf{d} + e^{-t}\mathbf{h}, \quad \mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d}, \mathbf{h} \in \mathbb{R}^3.$$

Esimerkki. Ratkaistaan seuraava systeemi varioimiskeinolla,

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = A\mathbf{x}(t) + \mathbf{f}(t), \quad A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{f}(t) = e^t \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}. \tag{1}$$

Ensin vastaava HS $\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x}$. Ominaisarvot:

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -2 & 3-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0 \Leftrightarrow \lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = 2.$$

Vastaaviksi ominaisvektoreiksi saadaan $\mathbf{u}_1 = [1\ 1]^T$ ja $\mathbf{u}_2 = [1\ 2]^T \in \mathbb{R}^2$. Siten systeemin perusmatriisi ja sen käänteismatriisi ovat

$$X(t) = \begin{bmatrix} e^t & e^{2t} \\ e^t & 2e^{2t} \end{bmatrix}, \quad X(t)^{-1} = \frac{1}{\det X} \begin{bmatrix} 2e^{2t} & -e^{2t} \\ -e^t & e^t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2e^{-t} & -e^{-t} \\ -e^{-2t} & e^{-2t} \end{bmatrix},$$

missä on sovellettu muistamisen arvoista säännöllisen 2×2-matriisin kääntösääntöä

$$B = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \longrightarrow B^{-1} = \frac{1}{\det B} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}.$$

Siten

$$\int X(t)^{-1}\mathbf{f}(t)\,dt = \begin{bmatrix} \int 2\,dt \\ -\int e^{-t}\,dt \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2t \\ e^{-t} \end{bmatrix},$$

ja systeemillä (1) on siis yksittäisratkaisu

$$\mathbf{x}_p(t) = X(t) \int X(t)^{-1}\mathbf{f}(t)\,dt = \begin{bmatrix} e^t & e^{2t} \\ e^t & 2e^{2t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2t \\ e^{-t} \end{bmatrix} = 2te^t \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + e^t \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Systeemin (1) yleinen ratkaisu on

$$\mathbf{x}(t) = 2te^t \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + e^t \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} + c_1 e^t \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + c_2 e^{2t} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Huom. Suora yrite $\mathbf{x}(t) = e^t\mathbf{a}$, jossa $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^2$, ei olisi toiminut. Syy: HS:llä on muotoa $e^{\lambda_1 t}\mathbf{u}_1 = e^t[1\ 1]^T$ oleva ratkaisu.

5 Viikko 49

Käsiteltiin autonomisia systeemejä tasossa, s.67-71. Riippukoot systeemin määrittelevät, annetut funktiot f ja g vain x:stä ja y:stä, ei vapaasta muuttujasta t: $f = f(x, y)$, $g = (x, y)$. *Autonomisen systeemin* (AS) normaalimuoto tasossa on

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= f(x(t), y(t)) \\ \dot{y}(t) &= g(x(t), y(t)) \end{aligned} \qquad (5.5)$$

Siten systeemissä (5.5) ei esiinny eksplisiittisesti vapaata muuttujaa t. Systeemin (5.5) radoille xy-faasiavaruudessa saadaan välittömästi skalaarinen 1. kl. DY

$$y'(x) = \frac{\dot{y}}{\dot{x}} = \frac{g(x, y)}{f(x, y)}, \qquad (5.6)$$

sillä aina, kun $\dot{x}(t) \neq 0$, niin on olemassa (paikallinen) käänteisfunktio $t(x)$ ja $t'(x) = 1/\dot{x}(t)$. Siten $y(x) = y(t(x))$ ja $y'(x) = \dot{y}(t)t'(x) = \dot{y}(t)/\dot{x}(t)$.

Definition 5.1. Olkoon $\mathbf{z}_0 = (x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ autonomisen systeemin (5.5) kriittinen piste: $f(x_0, y_0) = g(x_0, y_0) = 0$. Se on *stabiili*, jos jokaista $\epsilon > 0$ kohti on olemassa sellainen $\delta > 0$, että systeemin ratkaisulle $\mathbf{z}(t) = (x(t), y(t))$ pätee

$$\|\mathbf{z}(t) - \mathbf{z}_0\| = \big((x(t) - x_0)^2 + (y(t) - y_0)^2\big)^{1/2} < \epsilon \quad \text{kaikilla } t \geq 0$$

aina, kun $\|\mathbf{z}(0) - \mathbf{z}_0\| < \delta$ (siis ratkaisu pysyy lähellä, jos alkuarvo on lähellä).

Jos $\mathbf{z}_0 = (x_0, y_0)$ on stabiili, ja lisäksi on olemassa sellainen $\eta > 0$, että ratkaisulle $\mathbf{z}(t) = (x(t), y(t))$ pätee

$$\lim_{t\to\infty} \mathbf{z}(t) = \mathbf{z}_0 \Leftrightarrow \lim_{t\to\infty} x(t) = x_0 \text{ ja } \lim_{t\to\infty} y(t) = y_0$$

aina, kun $\|\mathbf{z}(0) - \mathbf{z}_0\| < \eta$, niin kriittinen piste $\mathbf{z}_0$ on *asymptoottisesti stabiili.* Muissa tapauksissa kriittinen piste $\mathbf{z}_0$ on *epästabiili.*

Huom. Edellä määritelty stabiilisuus on täysin lokaali käsite.

Olkoon $\mathbf{z}_0 = (x_0, y_0)$ AS:n (5.5) kriittinen piste. Silloin muunnoksella

$$u(t) = x(t) - x_0 \quad \text{ja} \quad v(t) = y(t) - y_0$$

päästään tilanteeseen, jossa

$$\begin{aligned} \dot{u} = \dot{x} = f(x, y) = f(u + x_0, v + y_0) = \tilde{f}(u, v) \\ \dot{v} = \dot{y} = g(x, y) = g(u + x_0, v + y_0) = \tilde{g}(u, v) \end{aligned}$$

ja $\tilde{f}(0, 0) = \tilde{g}(0, 0) = 0$. Muunnos siis siirtää kriittisen pisteen origoon, ja selvästikin kriittisen pisteen laatu säilyy muunnoksessa. Siten on riittää tutkia systeemiä (5.5), jossa $f(0, 0) = g(0, 0) = 0$, ja sen kriittistä pistettä $\mathbf{0} = (0, 0)$.

Monisteen esimerkkiin 5.7 liittyen tekee mieli ottaa esiin muutama seikka: Ratojen DY on (5.6):n mukaan suoraan

$$y'(x) = \frac{\dot{y}}{\dot{x}} = \frac{x-2}{-y},$$

joka separoituvana on helppo ratkaista. Saadaan ympyröitä. Seuraavien seikkojen osoittaminen, vaikka opiskelijaryhmissä, käy hyvästä (vaativahkosta) harjoituksesta:

1) Esimerkin systeemin ratkaisut ovat olemassa koko $\mathbb{R}$:ssä. Ohje: Reunalta reunallelause.

2) Kun $0 < c_2 < 4$, ratkaisut ovat jaksollisia. Ohje: Napakoordinaattien kulma $\theta(t)$. Koska rata ei sisŁllä kriittisiä pisteitä, niin $\dot{\theta}(t) \neq 0$ kaikilla t. Siis $\dot{\theta}(t)$ on yhdenmerkkinen (< 0), ja siten $\theta(t)$ on aidosti monotooninen eikä ole lauseen 5.9 perusteella rajoitettu funktio. Siten jollakin $\alpha > 0$ pätee $\mathbf{z}(\alpha) = \mathbf{z}(0)$. Lauseen 5.5 mukaan myös $\mathbf{z}(t+\alpha)$ on systeemin ratkaisu. Koska tämä ja $\mathbf{z}(t)$ toteuttavat saman alkuehdon, OY-lauseen perusteella $\mathbf{z}(t) = \mathbf{z}(t+\alpha)$ kaikilla t.

3) Kun $c_2 \geq 4$ ja $y(0) \neq 2$, niin $x_\infty = \lim_{t\to\infty} x(t) = 2 - \sqrt{c_2 - 4}$ ja $y_\infty = 2$. Siis ratkaisu lähestyy kriittistä pistettä. Ohje: Vain lähestyy, ei kohtaa sitä koskaan, mikä seuraa OY-lauseesta (kriittinen piste on vakioratkaisu). Muuten sama logiikka kuin kohdassa 2, mutta funktio $\theta(t)$ on radalla olevan kriittisen pisteen vuoksi rajoitettu. Siten raja-arvot θ_∞, x_∞ ja y_∞ ovat olemassa. Lopuksi sovelletaan lausetta 5.9 ja virtaussuuntia.

Lineaarisen autonomisen systeemin yleinen muoto tasossa on

$$\dot{\mathbf{z}}(t) = A\mathbf{z}(t) + \mathbf{f}, \quad \mathbf{z} = (x, y), \qquad (1)$$

jossa

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2} \quad \text{ja} \quad \mathbf{f} = (f_1, f_2)$$

ovat vakioita. Edellä esitetyllä muunnoksella päästään homogeenisysteemiin

$$\dot{\mathbf{z}}(t) = A\mathbf{z}(t), \qquad (2)$$

jossa erityisesti matriisi säilyy samana (ja tarkasteltavana on kriittinen piste $\mathbf{0}$).

Huom. Jos $\det A \neq 0$, systeemillä (1) on tasan yksi kriittinen piste. Jos $\det A = 0$, niitä on ∞-monta tai ei yhtään.

Esimerkki. Tarkastellaan lineaarista autonomista systeemiä

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= -5x(t) + 2y(t) + 1 \\ \dot{y}(t) &= x(t) - 4y(t) + 7. \end{aligned} \qquad (1)$$

Kriittinen piste on $(x_0, y_0) = (1, 2)$ (joka saadaan yhtälöparista $-5x + 2y + 1 = x - 4y + 7 = 0$). Matriisi on siis

$$A = \begin{bmatrix} -5 & 2 \\ 1 & -4 \end{bmatrix}.$$

Sen ominaisarvot:

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} -5-\lambda & 2 \\ 1 & -4-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 9\lambda + 18 = 0 \Leftrightarrow \lambda_1 = -3,\ \lambda_2 = -6.$$

Lasketaan hieman turhaan myös ominaisvektorit: $\lambda = -3$,

$$(A - \lambda I)\mathbf{u} = \begin{bmatrix} -2 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \mathbf{0} \Leftrightarrow \mathbf{u} = s \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Kun $\lambda = -6$, saadaan vastaavasti $\mathbf{u} = s[-2\ 1]^T$. Siten systeemin (1) yleinen ratkaisu on (kriittinen piste antaa EHS:n yksittäisratkaisun)

$$\mathbf{z}(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} + c_1 e^{-3t} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + c_2 e^{-6t} \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \text{ kun } t \to \infty.$$

Siis (1):n kriittinen piste $(1, 2)$ on asymptoottisesti stabiili. Ominaisarvojen etumerkit ratkaisevat!

Radat saadaan helpoimmin eliminoimalla yleisestä ratkaisusta t pois (kun nyt systeemi on osattu ratkaista). Merkitään $s = e^{-3t}$. Yleisestä ratkaisusta saadaan

$$x = c_1 s - 2c_2 s^2 + 1,\ y = c_1 s + c_2 s^2 + 2 \Rightarrow c_1 s = (1/3)(x + 2y - 5),\ s^2 = (1/9c_1^2)(x + 2y - 5)^2$$
$$y = (1/3)(x + 2y - 5) + (c_2/9c_1^2)(x + 2y - 5)^2 \Leftrightarrow -x + y - 1 = c(x + 2y - 5)^2,\ c = c_2/3c_1^2 \in \mathbb{R}.$$

Esimerkki. Tarkastellaan lineaarista autonomista systeemiä

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y \\ \dot{y} &= -4x. \end{aligned} \qquad (1)$$

Matriisi on $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -4 & 0 \end{bmatrix}$ ja kriittinen piste on $\mathbf{0}$. Ominaisarvot:

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -4 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 4 = 0 \Leftrightarrow \lambda = \pm 2i.$$

Siten $\alpha = 0$ ja $\beta = 2$. Ominaisvektorit (taas hiukan turhaan): $\lambda = 2i$,

$$(A - \lambda I)\mathbf{u} = \begin{bmatrix} -2i & 1 \\ -4 & -2i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \mathbf{0} \Leftrightarrow -2iu_1 + u_2 = 0 \Leftrightarrow \mathbf{u} = s \begin{bmatrix} -i \\ 2 \end{bmatrix} = s\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix} + i \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix} \right).$$

Siten $\mathbf{a} = [0\ 2]^T$ ja $\mathbf{b} = [-1\ 0]^T$, ja systeemillä (1) on pj.

$$(\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2) = \left(\cos 2t \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix} + \sin 2t \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \sin 2t \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix} - \cos 2t \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right)$$

ja yleinen ratkaisu $\mathbf{z}(t) = c_1\mathbf{z}_1(t) + c_2\mathbf{z}_2(t)$.

Alkuehto $x(0) = x_0$ ja $y(0) = y_0$ antaa $c_1 = (1/2)y_0$ ja $c_2 = -x_0$. Siten pätee

$$\|\mathbf{z}(t)\| \le |c_1|\|\mathbf{z}_1\| + |c_2|\|\mathbf{z}_2\| \le (|c_1| + |c_2|)\left(\left\| \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix} \right\| + \left\| \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\| \right) = 3\big((1/2)|y_0| + |x_0|\big).$$

Siten $\|\mathbf{z}(t)\|$ pysyy pienenä, jos $\|\mathbf{z}(0)\|$ on pieni, ja kriittinen piste $\mathbf{0}$ on siis stabiili (muttei asymptoottisesti stabiili).

Esimerkkien valossa on käynyt selväksi seuraava perustulos:

Theorem 5.2 (Lause 5.A, lineaarisen autonomisen systeemin stabiilisuus)**.** *Lineaarisen autonomisen systeemin*

$$\dot{\mathbf{z}}(t) = A\mathbf{z}(t), \quad \mathbf{z} = (x, y), \quad A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2} \qquad (1)$$

kriittisen pisteen **0** *laatu määräytyy matriisin* A *ominaisarvoista seuraavasti:*

ominaisarvot	**kriittisen pisteen 0 laatu**
positiiviset	*epastabiili*
negatiiviset	*asymptoottisesti stabiili*
erimerkkiset	*epastabiili (nk. satulapiste)*
nolla ja positiivinen	*epastabiili*
nolla ja negatiivinen	*stabiili*
kompleksiset ominaisarvot :	
reaaliosa positiivinen	*epastabiili*
reaaliosa negatiivinen	*asymptoottisesti stabiili*
reaaliosa nolla	*stabiili (keskus).*

Jos lisäksi $\det A \neq 0$*, niin* **0** *on systeemin (1) ainoa kriittinen piste. Jos* $\det A = 0$*, kriittisiä pisteitä on* ∞*-monta, ja niiden laatu on sama kuin kriittisen pisteen* **0** *eli saadaan yllä olevasta taulukosta.*

Palataan takaisin yleiseen, epälineaariseen autonomiseen systeemiin (5.5) tasossa. Oletetaan, että origo on kriittinen piste ja funktiot $f(x, y)$ sekä $g(x, y)$ ovat jatkuvasti derivoituvia jossain sen ympäristössä. Tällöin systeemin *linearisointi* origossa on lineaarinen autonominen systeemi

$$\dot{\mathbf{z}}(t) = A\mathbf{z}(t), \quad \mathbf{z}(t) = (x(t), y(t)), \qquad (5.7a)$$

jossa

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f(0,0)}{\partial x} & \frac{\partial f(0,0)}{\partial y} \\ \frac{\partial g(0,0)}{\partial x} & \frac{\partial g(0,0)}{\partial y} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2, \qquad (5.7b)$$

siis kuvauksen $(f, g) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ derivaatta(matriisi) pisteessä $(x, y) = (0, 0)$.

Otetaan apukeinoja lineaarialgebrasta: Matriisi $B \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ määrittelee neliömuodon $N : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,

$$N(x, y) = [x\ y]B[x\ y]^T, \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2. \qquad (5.8)$$

Matriisi B on positiivisesti (negatiivisesti) definiitti, jos $N(x, y) > 0$ ($N(x, y) < 0$) kaikilla $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{\mathbf{0}\}$. Symmetrinen, positiivisesti definiitti matriisi B määrittelee (elliptisen) normin $\mathbb{R}^2$:ssa yhtälöllä

$$\|(x, y)\|_B^2 = N(x, y) = [x\ y]B[x\ y]^T, \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2. \qquad (5.9)$$

Se on ekvivalentti tavallisen Euklidisen normin kanssa. Erityisesti pisteiden (x, y) jonolle pätee

$$\|(x,y)\|_B \to 0 \Leftrightarrow \|(x,y)\| \to 0.$$

Lemma 5.3. *Jos matriisin $A \in \mathbb{R}^2$ ominaisarvot ovat erit ja negatiiviset (positiiviset), on olemassa sellainen symmetrinen, posiitisesti definiitti matriisi $B \in \mathbb{R}^2$, että matriisi BA on negatiivisesti (positiivisesti) definiitti.*

Proof. Olkoot $A\mathbf{u} = -\lambda_1\mathbf{u}$, $A\mathbf{w} = -\lambda_2\mathbf{w}$, jossa $\lambda_1, \lambda_2 > 0$, $\mathbf{u} = (u_1, u_2)$, $\mathbf{v} = (-u_2, u_1)$, $\mathbf{w} = (w_1, w_2)$ ja $\|\mathbf{u}\| = \|\mathbf{v}\| = \|\mathbf{w}\| = 1$. Silloin

$$\mathbf{w} = \cos\theta\,\mathbf{u} + \sin\theta\,\mathbf{v} \quad \text{jollakin } \theta \in \mathbb{R}.$$

Koska $\mathbf{u}$ ja $\mathbf{w}$ ovat lauseen 6.12 mukaan lineaarisesti riippumattomia, niin erityisesti pätee $\sin\theta \neq 0$.

Määritellään jokaisella $r > 0$ matriisi

$$B = \begin{bmatrix} u_1 & -u_2 \\ u_2 & u_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 & u_2 \\ -u_2 & u_1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}. \qquad (1)$$

Silloin $B\mathbf{u} = \mathbf{u}$, $B\mathbf{v} = r\mathbf{v}$, ja B on symmetrinen, positiivisesti definiitti matriisi (symmetrinen ja ominaisarvot positiiviset).

Tarkastellaan matriisia BA ja sen määrittelemän neliömuodon arvoja pisteissä $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{\mathbf{0}\}$. Tyyppiä $(x,y) = c\,\mathbf{u}$ olevat pisteet toteuttavat vaatimuksemme heti: silloin $[x\ y]BA[x\ y]^T = -\lambda_1 c^2 < 0$. Koska muoto on neliöllinen, loput voidaan tarkoitustamme ajatellen normittaa muotoon

$$(x,y) = c\,\mathbf{u} + \mathbf{w} = (c + \cos\theta)\mathbf{u} + \sin\theta\,\mathbf{v} \quad (c \in \mathbb{R}). \qquad (2)$$

Muotoa (2) oleville pisteille pätee

$$A[x\ y]^T = -\lambda_1 c\,\mathbf{u} - \lambda_2\mathbf{w} = -(\lambda_1 c + \lambda_2\cos\theta)\mathbf{u} - \lambda_2\sin\theta\,\mathbf{v}$$

ja edelleen

$$\begin{aligned}
&[x\ y]BA[x\ y]^T = [x\ y]B\big(-(\lambda_1 c + \lambda_2\cos\theta)\mathbf{u} - \lambda_2\sin\theta\,\mathbf{v}\big) = \big((c+\cos\theta)\mathbf{u} + \sin\theta\,\mathbf{v}\big)\cdot \\
&\big(-(\lambda_1 c + \lambda_2\cos\theta)\mathbf{u} - r\lambda_2\sin\theta\,\mathbf{v}\big) = -(c+\cos\theta)(\lambda_1 c + \lambda_2\cos\theta) - r\lambda_2\sin^2\theta \\
&= p(c) - r\lambda_2\sin^2\theta,
\end{aligned}$$

jossa $p(c)$ on 2. asteen polynomi. Sen globaali maksimi on

$$\max_{c\in\mathbb{R}} p(c) = p\Big(-\frac{\lambda_1+\lambda_2}{2\lambda_1}\cos\theta\Big) = \frac{(\lambda_1-\lambda_2)^2}{4\lambda_1}\cos^2\theta.$$

Valitaan sellainen $r > 0$, että (huomaa, että $\sin\theta \neq 0$)

$$\max_{c\in\mathbb{R}} p(c) - r\lambda_2\sin^2\theta < 0 \Leftrightarrow r > \frac{(\lambda_1-\lambda_2)^2}{4\lambda_1\lambda_2}\frac{\cos^2\theta}{\sin^2\theta}.$$

Silloin $[x\ y]BA[x\ y]^T < 0$ kaikilla $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{\mathbf{0}\}$. $\square$

Huom. Lemman oletuksilla A on negatiivisesti (positiivisesti) definiitti tasan silloin, kun

$$\frac{4\lambda_1\lambda_2}{(\lambda_1-\lambda_2)^2} > \frac{\cos^2\theta}{\sin^2\theta},$$

siis symmetrisen matriisin tapauksessa aina, sillä silloin $\cos\theta = 0$ (ominaisvektorit kohtisuorassa).

Theorem 5.4 (Poincarén stabiilisuuslause)**.** *Oletetaan, että autonomisessa systeemissä (5.5) origo on kriittinen piste ja funktiot $f(x,y)$ sekä $g(x,y)$ ovat jatkuvasti derivoituvia jossain sen ympäristössä. Olkoot λ_1 ja λ_2 systeemin linearisoinnin (5.7) matriisin $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ ominaisarvot. Oletetaan lisäksi, että* $\det A \neq 0$. *Tällöin systeemin (5.5) kriittisen pisteen* $\mathbf{0}$ *laatu on sama kuin linearisoinnissa (5.7) poikkeuksena yksi tapaus: Jos λ_1 ja λ_2 ovat puhtaasti imaginaarisia, systeemin (5.5) stabiilisuuden laatua ei voi päätellä linearisoinnista (5.7).*

Proof. Viittaamme kirjaan D.W. Jordan and P. Smith: Nonlinear Ordinary Differential Equations, 2nd ed., Clarendon Press, Oxford 1987, Chapter 10.

Malliksi todistamme kuitenkin tapauksista sen, jossa λ_1 ja λ_2 ovat erit ja negatiiviset. Koska $f(0,0) = g(0,0) = 0$, differentiaalikehitelmä saa muodon

$$\begin{bmatrix} f(x,y) \\ g(x,y) \end{bmatrix} = A\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ho_1(h) \\ ho_2(h) \end{bmatrix}, \qquad (1)$$

jossa A on linearisoinnin matriisi ja $o_1(h), o_2(h) \to 0$, kun $h = \sqrt{x^2+y^2} = \|(x,y)\| \to 0$.

Olkoon B lemmassa mainittu symmetrinen, positiivisesti definiitti matriisi. Erityisesti se määrittelee $\mathbb{R}^2$:n normin $\|(x,y)\|_B^2 = [x\ y]B[x\ y]^T$, ja pätee $\|(x,y)\| \to 0$, kun $\|(x,y)\|_B \to 0$. Käytetään kyseistä normia nk. Lyapunovin funktiona: määritellään

$$V(x,y) = \frac{1}{2}\|(x,y)\|_B^2 = \frac{1}{2}[x\ y]B[x\ y]^T, \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2. \qquad (2)$$

Olkoon $\mathbf{z}(t) = (x(t), y(t))$ systeemin (5.5) ratkaisu. Tätä vastaten määritellään vielä

$$s(t) = V(x(t), y(t)). \qquad (3)$$

Silloin (1):n mukaan

$$\begin{aligned} \dot{s}(t) &= \frac{1}{2}[\dot{x}\ \dot{y}]B[x\ y]^T + \frac{1}{2}[x\ y]B[\dot{x}\ \dot{y}]^T = [x\ y]B[\dot{x}\ \dot{y}]^T \\ &= [x\ y]B[f(x,y)\ g(x,y)]^T = [x\ y]BA[x\ y]^T + h[x\ y]B[o_1(h)\ o_2(h)]^T. \end{aligned} \qquad (4)$$

Koska BA on negatiivisesti definiitti, löytyy sellainen $\alpha > 0$, että

$$[x\ y]BA[x\ y]^T \le -2\alpha(x^2+y^2) \quad \text{kaikilla } (x,y) \in \mathbb{R}^2. \qquad (5)$$

Kehitelmän (4) nojalla löytyy sellainen $\epsilon > 0$, että

$$\dot{s}(t) \le -\alpha(x^2+y^2) \le -2\frac{\alpha}{r}s(t) = -\beta s(t) \quad \text{kaikilla } (x(t),y(t)) \in B(\mathbf{0},\epsilon), \qquad (6)$$

kun matriisissa B on valittu $r \geq 1$. Lisäksi $\beta > 0$. Siten löytyy sellainen $\delta > 0$ että, jos $(x(0), y(0)) \in B(\mathbf{0}, \delta)$, niin

$$\dot{s}(t) \leq 0 \quad \text{ja} \quad (x(t), y(t)) \in B(\mathbf{0}, \epsilon) \quad \text{kaikilla } t \geq 0. \tag{7}$$

Koska $\epsilon > 0$ voidaan valita kuinka pieneksi tahansa, arviosta (7) seuraa erityisesti stabiilisuus.

Kun $(x(0), y(0)) \in B(\mathbf{0}, \delta)$, arvioiden (6) ja (7) mukaan pätee

$$\dot{s}(t) + \beta s(t) \leq 0 \quad \forall t \geq 0 \Leftrightarrow \frac{d}{dt}\big(s(t)e^{\beta t}\big) \leq 0 \quad \forall t \geq 0 \Rightarrow s(T)e^{\beta T} - s(0)$$
$$= \int_0^T \frac{d}{dt}\big(s(t)e^{\beta t}\big)\,dt \leq \int_0^T 0\,dt = 0 \Rightarrow s(T) \leq s(0)e^{-\beta T} \to 0,$$

kun $T \to \infty$. Siis $\|(x(t), y(t))\|_B \to 0$ ja siten $\|(x(t), y(t))\| \to 0$, kun $t \to \infty$. Stabiilisuus on asymptoottista. □

Kirjataan Poincarén lause vielä taulukon muotoon:

A : n ominaisarvot	**0 : n laatu linearisoinnissa**	**sen laatu (5.5) : ssa**
positiiviset	*epastabiili*	*epastabiili*
negatiiviset	*asymptoottisesti stabiili*	*asymptoottisesti stabiili*
erimerkkiset	*epastabiili (nk. satulapiste)*	*epastabiili (nk. satulapiste)*
kompleksiset ominaisarvot :		
reaaliosa positiivinen	*epastabiili*	*epastabiili*
reaaliosa negatiivinen	*asymptoottisesti stabiili*	*asymptoottisesti stabiili*
reaaliosa nolla	*stabiili (keskus)*	*laatu avoin.*

Esimerkki. Tarkastaellaan autonomista systeemiä

$$\dot{x}(t) = 7x - x^2 - 2xy$$
$$\dot{y}(t) = 5y - y^2 - xy.$$

Se mallintaa samasta ravinnosta kilpailevia populaatioita. Kriittiset pisteet:

$x(7 - x - 2y) = 0,\ y(5 - y - x) = 0 \Leftrightarrow (x, y) = (0, 0)$ tai $(x, y) = (0, 5)$ tai $(x, y) = (7, 0)$ tai $(x, y) = (3, 2)$.

Niitä ei tarvitse siirtää muunnoksella origoon (erityisesti derivaattamatriisi säilyy muunnoksessa)! Linearisointi:

$$A(x, y) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f(x,y)}{\partial x} & \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} \\ \frac{\partial g(x,y)}{\partial x} & \frac{\partial g(x,y)}{\partial y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 - 2x - 2y & -2x \\ -y & 5 - 2y - x \end{bmatrix}.$$

$(x, y) = (0, 0)$: Silloin

$$A = A(0,0) = \begin{bmatrix} 7 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}, \quad \det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 7-\lambda & 0 \\ 0 & 5-\lambda \end{vmatrix} = (7-\lambda)(5-\lambda) = 0.$$

Saadaan $\lambda_1 = 5,\ \lambda_2 = 7$, positiiviset. Siten kriittinen piste $(0,0)$ on epästabiili.

$(x,y) = (0,5)$: Silloin

$$A = A(0,5) = \begin{bmatrix} -3 & 0 \\ -5 & -5 \end{bmatrix}, \quad \det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} -3-\lambda & 0 \\ -5 & -5-\lambda \end{vmatrix} = (\lambda+3)(\lambda+5) = 0.$$

Saadaan $\lambda_1 = -3,\ \lambda_2 = -5$, negatiiviset. Siten kriittinen piste $(0,5)$ on asymptoottisesti stabiili.

$(x,y) = (7,0)$: Silloin

$$A = A(7,0) = \begin{bmatrix} -7 & -14 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}, \quad \det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} -7-\lambda & -14 \\ 0 & -2-\lambda \end{vmatrix} = (2+\lambda)(7+\lambda) = 0.$$

Saadaan $\lambda_1 = -2,\ \lambda_2 = -7$, negatiiviset. Siten kriittinen piste $(7,0)$ on asymptoottisesti stabiili.

$(x,y) = (3,2)$: Silloin

$$A = A(3,2) = \begin{bmatrix} -3 & -6 \\ -2 & -2 \end{bmatrix}, \quad \det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} -3-\lambda & -6 \\ -2 & -2-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 5\lambda - 6 = 0.$$

Saadaan $\lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = -6$, erimerkkiset. Siten kriittinen piste $(3,2)$ on epästabiili (satulapiste).

Suorat $x = 0$ ja $y = 0$ ovat mallissa selvästi invariantteja: niillä pysytään, jos niiltä aloitetaan. OY-lauseesta seuraa, että myös ensimmäinen (avoin) koordinaattineljännes on invariantti, kuten populaatiomallilta sopii odottaakin. Ylipäätään malli virtauskuvioineen sisältää selvästi mielenkiintoista biologista informaatioita.

6 Viikko 50

Vietiin Poincarén stabiilisuuslauseen (osa)todistus loppuun ja esitettiin joitakin lisäesimerkkejä.

Esimerkki. Tarkastellaan autonomista systeemiä

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= -3x + 2y - xy + y^3 \\ \dot{y}(t) &= -x - y + x^2 - y^2. \end{aligned}$$

Selvästi origo on systeemin kriittinen piste, eikä nyt välitetä mahdollisista muista. Tutkitaan sen laatu. Linearisointi:

$$A(x,y) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3-y & 2-x+3y^2 \\ -1+2x & -1-2y \end{bmatrix}, \quad A = A(0,0) = \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Ominaisarvot:

$$\det(A-\lambda I) = \begin{vmatrix} -3-\lambda & 2 \\ -1 & -1-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 4\lambda + 5 = 0 \Leftrightarrow \lambda = -2 \pm i.$$

Kompleksiset, reaaliosa negatiivinen. Siten kriittinen piste $\mathbf{0}$ on asymptoottisesti stabiili.

Poincarén lauseen käytöllä on kuitenkin rajoituksensa. Esimerkiksi tartuntatautien SIR-mallissa

$$\begin{aligned} \frac{di}{dt} &= \alpha R_0 i(t)s(t) - \alpha i(t) \\ \frac{ds}{dt} &= -\alpha R_0 i(t)s(t) \end{aligned}$$

kriittiset pisteet ovat $(0,s)$, $s \in \mathbb{R}$. Linearisoinnin matriisi

$$A(0,s) = \begin{bmatrix} \alpha R_0 s - \alpha & 0 \\ -\alpha R_0 s & 0 \end{bmatrix}$$

on kuitenkin singulaarinen: $\det A = 0$. Siten PoincarŐn lausetta ei voi käyttää. Muuta tietä voidaan osoittaa, että kriittinen piste $(0,s)$, $s > 0$, on stabiili tasan silloin, kun $R_0 < 1/s$ (kun $R_0 > 1/s$ syntyy epidemia).

Samoin käy SIS-mallissa. Esimerkin 5.7 linearisoinnin matriisi A on singulaarinen kriittisissä pisteissä $(x,2)$. Kriittisessä pisteessä $(2,0)$ se on

$$A(2,0) = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}$$

ja ominaisarvot ovat $\lambda = \pm 2i$. Pisteiden laatu nähtiin kuitenkin suoraan.

Olemme käyttäneet differentiaaliyhtälöitä mallintamaan muun muassa populaatioiden kehitystä. Tämä on tapahtunut varsin deterministisessä hengessä. Kuitenkin jo terve järki sanoo, ett/"a sattumalla on sijansa tällaisissa ilmiöissä. Tämän huomioiminen tuo mukaan matemaattisen todennäköisyyden (tn.) käsitteen. Kurssin lopuksi esitämmekin asiasta yksinkertaisen esimerkin: radioaktiivinen hajoaminen esitetään *stokastisena prosessina*. Tulemme näkemään, että stokastinen malli antaa avarammat puitteet käsitellä varmuutta ja epävarmuutta kuin pelkkä differentiaaliyhtälömalli.

Radioaktiivinen aine käsitetään atomien äärellisenä populaationa, jossa atomin hajoaminen merkitsee yksilön katoamista populaatiosta. Kyse on siis populaatiomallista. Näin tulkiten stokastisesta prosessista tulee *diskreettitilainen* (atomipopulaation saamat arvot ovat luonnollisia lukuja), mutta *jatkuva-aikainen* (sillä aikamuuttujalle ei aseteta mitään rajoja). Tarvitsemme (onneksi vain) joitakin apukeinoja todennäköisyyslaskennasta:

Olkoon $\lambda > 0$. *Eksponenttijakauman* $Exp(\lambda)$ tiheysfunktio (tf.) on

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & \text{kun x>0,} \\ 0 & \text{muulloin.} \end{cases} \qquad (1)$$

Sen kertymäfunktio (kf.) on

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt = 1 - e^{-\lambda x}, \quad x > 0. \qquad (2)$$

Noudattakoon reaaliarvoinen satunnaismuuttuja (sm.) X eksponenttijakaumaa, mikä merkitään $X \sim Exp(\lambda)$. Tällöin tn., että X saa arvon väliltä $]a, b]$ on

$$P(a < X \leq b) = \int_{a}^{b} f(t)\,dt = F(b) - F(a). \qquad (3)$$

Erityisesti

$$P(X \leq x) = F(x) = 1 - e^{-\lambda x}, \quad x > 0. \qquad (4)$$

Eksponenttijakaumalla on seuraava "muistamattomuusominaisuus": Bayesin kaavan mukaan

$$\begin{aligned} P(X \leq x + y \,|\, X > y) &= \frac{P(y < X \leq x + y)}{P(X > y)} = \frac{F(x+y) - F(y)}{1 - F(y)} = \frac{e^{-\lambda y} - e^{-\lambda(x+y)}}{e^{-\lambda y}} \\ &= 1 - e^{-\lambda x} = P(X \leq x). \end{aligned} \qquad (5)$$

Tulkitaan X elinajaksi (eksponenttijakaumaa käytetään paljon elinajan stokastiseen mallintamiseen). Siis ehdollinen tn., että on elänyt mielivaltaisen ajan y ja elää sen päälle (siis sillä ehdolla) vielä ajan $\leq x$, on aivan sama kuin tavallinen tn., että elää yksinkertaisesti ajan $\leq x$. Jos on vielä hengissä, jäljellä oleva elinaika käyttäytyy aina samoin!

Rakennetaan skokastinen populaatiomalli $\{N(t) \,|\, t \geq 0\}$, jossa kuhunkin hetkeen t liittyy sm. $N(t)$, hetkellä t hengissä olevien atomien lukumäärä. Tämä saa arvoikseen luonnollisia lukuja, mikä merkitään $N(t) \in \mathbb{N}$. *Pistetodennäköisyydet* (ptn:t)

$$p_n(t) = P(N(t) = n), \quad n \in \mathbb{N}, \qquad (6)$$

määräävät sm:n $N(t)$ jakauman. Olkoon $N(0) = N_0$. Itse asiassa pätee $N(t) \in \{0, \cdots, N_0\}$.

Muuttujien $N(t)$ jakaumat, ts. ptn:t (6), (ja myös yhteisjakaumat) saadaan määrittelemällä nk. *siirtymätodennäköisyydet*: Oletetaan kunkin atomin elinaika $Exp(\lambda)$-jakautuneeksi sm:ksi. Oletetaan, että nämä elinaikamuutujat ovat toisistaan riippumattomia (ei siis puhettakaan ketjureaktiosta). Yksittäinen atomi, jos se on elänyt ajan t, hajoaa (5):n mukaan aikavälillä $[t, t + h]$ (toisista riippumattomasti) tn:llä

$$p = 1 - e^{-\lambda h} = \lambda h + o(h)h, \qquad (7)$$

jossa on käytetty differentiaalikehitelmää $e^h - e^0 = h + o(h)h$, ja $o(h) \to 0$, kun $h \to 0$.

Noudattakoon sm. Y binomijakaumaa parametreina n ja p, mikä merkitään $Y \sim Bin(n, p)$. Tämän jakauman ptn:t ovat

$$P(Y = k) = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k}, \quad k = 0, \cdots, n, \qquad (8)$$

sen odotusarvo ja varianssi ovat

$$EY = np \quad \text{ja} \quad Var(Y) = EY^2 - (EY)^2 = np - np^2. \qquad (9)$$

Edellä esitettyjen, elinaikoja koskevien oletustan mukaan sm. *populaation muutos* $N(t) - N(t + h)$ *on binomijakautunut parametreina* $N(t)$ *ja* p,

$$N(t) - N(t+h) \sim Bin(N(t), p), \qquad (10)$$

jossa p on kuten (7):ssa. Juuri relaatio (10) ja (8) antavat siirtymätn:t (stokastisen prosessin käsitteen tunteville sanottakoon vielä: (5):n ansiosta ristiriidattomasti). Ne ovat

$$p_{k,n}(t, t+h) = P(N(t+h) = n \,|\, N(t) = k) = \binom{k}{n} p^{k-n}(1-p)^n, \quad n = 0, \cdots, k, \qquad (11)$$

ja $p_{k,n}(t, t+h) = 0$, kun $n > k$. Näin määritellystä populaatioprosessista $\{N(t) \,|\, t \geq 0\}$ tulee nk. *stationaarinen Markovin prosessi.* Kun otetaan huomioon alkuehto $N(0) = N_0$, saadaan prosessin ptn:t

$$p_n(t) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k(0) p_{k,n}(0, t) = \binom{N_0}{n} \left(1 - e^{-\lambda t}\right)^{N_0 - n} e^{-n\lambda t}, \quad n = 0, \cdots, N_0, \qquad (12)$$

ja $p_n(t) \equiv 0$, kun $n > N_0$.

Proposition 6.1. *Prosessin $\{N(t) \,|\, t \geq 0\}$ odotusarvo $\mu(t) = E(N(t))$, $t \geq 0$, toteuttaa differentiaaliyhtälön*

$$\dot{\mu}(t) = -\lambda \mu(t). \qquad (13)$$

Kun alkuehto $N(0) = N_0$ otetaan huomioon, saadaan $\mu(t) = N_0 e^{-\lambda t}$, siis radioaktiivisen hajoamisen standardilaki.

Proof. Relaation (10) mukaan kaikilla vakioilla $n \in \mathbb{N}$ voidaan kirjoittaa $(N(t+h) \,|\, N(t) = n) = n - Y$, jossa $Y \sim Bin(n, p)$. Siten (9):n mukaan ehdolliselle odotusarvolle pätee

$$E(N(t+h) \,|\, N(t) = n) = E(n - Y) = n - EY = n - np = n(1-p).$$

Odotusarvo voidaan muodostaa ehdollisen odotusarvon kautta (kulkemalla kaikki ehtoreitit):

$$\begin{aligned}
\mu(t+h) = E(N(t+h)) &= \sum_{n=0}^{\infty} P(N(t) = n) E(N(t+h) \,|\, N(t) = n) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n(t) n(1-p) \\
&= (1-p) \sum_{n=0}^{\infty} n p_n(t) = (1-p) E(N(t)) = (1-p)\mu(t).
\end{aligned}$$

Siten (7):n mukaan

$$\frac{\mu(t+h) - \mu(t)}{h} = -\frac{p}{h}\mu(t) = -(\lambda + o(h))\mu(t),$$

josta rajankäynnillä $h \to 0$ saadaan yhtälö (13). ☐

Proposition 6.2. *Prosessin $\{N(t) \,|\, t \geq 0\}$ varianssi on*

$$\sigma^2(t) = E(N(t)^2) - \mu(t)^2 = N_0 \Big(e^{-\lambda t} - e^{-2\lambda t}\Big). \qquad (14)$$

Proof. Relaation (10) mukaan voidaan kirjoittaa $(N(t+h)^2 \mid N(t) = n) = (n-Y)^2$, jossa $Y \sim Bin(n,p)$. Siten (9):n mukaan ehdolliselle odotusarvolle pätee

$$\begin{aligned}E(N(t+h)^2 \mid N(t) = n) = E(n-Y)^2 &= n^2 - 2nEY + EY^2 = n^2 - 2n^2p + np - np^2 + n^2p^2 \\ &= (1-2p+p^2)n^2 + (p-p^2)n.\end{aligned}$$

Merkitään $\rho(t) = E(N(t)^2)$. Ehdollisen odotusarvon kautta (kulkemalla kaikki ehtoreitit) saadaan:

$$\rho(t+h) = E(N(t+h)^2) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n(t) E(N(t+h)^2 \mid N(t) = n) =$$
$$(1-2p+p^2)\sum_{n=0}^{\infty} n^2 p_n(t) + (p-p^2)\sum_{n=0}^{\infty} np_n(t) = (1-2p+p^2)\rho(t) + (p-p^2)\mu(t).$$

Siten (7):n mukaan

$$\frac{\rho(t+h)-\rho(t)}{h} = \frac{-2p+p^2}{h}\rho(t) + \frac{p-p^2}{h}\mu(t) = (-2\lambda + o(h))\rho(t) + (\lambda + o(h))\mu(t),$$

josta rajankäynnillä $h \to 0$ saadaan lineaarinen differentiaaliyhtälö

$$\begin{aligned}&\dot\rho(t) + 2\lambda\rho(t) = \lambda\mu(t) \Leftrightarrow \frac{d}{dt}\big(\rho e^{2\lambda t}\big) = \lambda\mu e^{2\lambda t} = \lambda N_0 e^{\lambda t} \Leftrightarrow \\ &\rho e^{2\lambda t} = N_0 \int \lambda e^{\lambda t}\, dt = N_0 e^{\lambda t} + c \Leftrightarrow \rho(t) = N_0 e^{-\lambda t} + ce^{-2\lambda t}.\end{aligned}$$

Alkuehto: $\rho(0) = E(N(0)^2) = N_0^2$. Siten $N_0^2 = \rho(0) = N_0 + c \Rightarrow c = N_0^2 - N_0$. Siten $\rho(t) = N_0e^{-\lambda t} + (N_0^2 - N_0)e^{-2\lambda t}$ ja $\sigma^2(t) = \rho(t) - \mu(t)^2 = N_0\big(e^{-\lambda t} - e^{-2\lambda t}\big)$. □

Huom. Ennustamisessa on mieltä niin kauan, kun $\mu(t) = N_0 e^{-\lambda t} \geq 1$. Tällöin hajonta $\sigma(t) = \sqrt{N_0}\big(e^{-\lambda t} - e^{-2\lambda t}\big)^{1/2}$ on suhteessa odotusarvoon pieni, mikä on stokastisissa prosesseissa varsin poikkeuksellista. Hajonnan pienuus johtuu paljolti prosessin vähenevästä luonteesta. Joka tapauksessa voidaan vetää seuraava johtopäätös: Radioaktiivisen hajoamisen standardilaki $N(t) = N_0e^{-\lambda t}$ pitää varsin hyvin kutinsa.

Paljolti samanlaisilla tarkasteluilla saadaan pistetodennäköisyyksille $p_n(t) = P(N(t) = n)$, $n \in \mathbb{N}$, differentiaaliyhtälösysteemi

$$\dot p_n(t) = -n\lambda p_n(t) + (n+1)\lambda p_{n+1}(t), \quad n \in \mathbb{N}. \qquad (15)$$

Johda se! Ohje: (7); kun $k > 1$, niin $p^k/h \to 0$, enemmänkin $\sum_{k>1} p^k/h \to 0$, kun $h \to 0$.

Kun alkuehtona on $N(0) = N_0$, ts. $p_{N_0}(0) = 1$ ja $p_n(0) = 0$, kun $n \neq N_0$, niin selvästikin pätee $p_n(t) \equiv 0$ kaikilla $n > N_0$. Siten (15) on tavallinen (äärellinen) lineaarinen 1. kl. homogeenisysteemi, vieläpä vakiokertoiminen. Se voidaan ratkaista matriisikeinolla. Voi menetellä toisinkin: purkaa se erillisiksi skalaarisiksi differentiaaliyhtälöiksi aloittamalla yläpäästä, yhtälöstä $\dot p_{N_0} = -N_0\lambda p_{N_0}$. Kun alkuehto $p_{N_0}(0) = 1$ huomioidaan, saadaan $p_{N_0}(t) = e^{-N_0\lambda t}$. Seuraava yhtälö on $\dot p_{N_0-1} = -(N_0-1)\lambda p_{N_0-1} + N_0 e^{-N_0\lambda t}$, josta käyttäen alkuehtoa $p_{N_0-1}(0) = 0$ saadaan $p_{N_0-1}(t) = N_0\big(e^{-(N_0-1)\lambda t} - e^{-N_0\lambda t}\big)$. Induktiolla saadaan ratkaisuksi (luonnollisesti) funktiot (12). Asioita voidaan tarkastella käänteisestikin: systeemistä (15) voidaan johtaa lyhyehkösti propositioissa 1 ja 2 esinntyvät differentiaaliyhtälöt ja siten odotusarvo sekä varianssi (tee se).

Jos hengissä oleville ptn:lle ei ole ylärajaa kuten (15):ssä tässä on, systeemi ei ole äärellinen, eikä sitä voi käsitellä tavallisena lineaarisena systeeminä. Silloin voidaan käyttää nk. *generoivaa funktiota*

$$G(t;x) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n(t)x^n, \qquad (16)$$

jolle saadaan osittaisdifferentiaaliyhtälö. Prosessimme osalta tämä kuuluu

$$\frac{\partial G}{\partial t} = -\lambda x\frac{\partial G}{\partial x} + \lambda\frac{\partial G}{\partial x} = \lambda(1-x)\frac{\partial G}{\partial x}$$

alku-reunaehtonaan $G(0,x) = x^{N_0}$.

Olkoon lopuksi populaatioprosessissa $\{N(t)\,|\,t \geq 0\}$, $N(t) \in \mathbb{N}$, syntymiä ja kuolemia:

$$N(t+h) = N(t) + Y - Z, \qquad (17)$$

jossa $Y \sim Bin(N(t),p)$, $Z \sim Bin(N(t),q)$, $Y \amalg Z$, $p = h(\alpha + o(h))$, $q = h(\beta + o(h))$ ja $\alpha, \beta > 0$. Vastaavasti kuten edellä, odotusarvolle saadaan yhtälö $\dot{\mu}(t) = (\alpha - \beta)\mu(t)$, joten $\mu(t) = N_0e^{(\alpha-\beta)t}$. Varianssiksi saadaan

$$\sigma^2(t) = N_0\frac{\alpha+\beta}{\beta-\alpha}\Big(e^{(\alpha-\beta)t} - e^{2(\alpha-\beta)t}\Big). \qquad (18)$$

LOPPU