Differentiaaliyhtälöt II, kurssikoe ti 9.12.2008, ratkaisut (JL), 4 sivua

1. Osoita, että $\left\{\begin{pmatrix}1+t\\1+t\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2e^t\\e^t\end{pmatrix}\right\}$ on differentiaaliyhtälön $\dot{x}(t) = \dfrac{1}{1+t}\begin{pmatrix}1+2t & -2t\\ t & 1-t\end{pmatrix}x(t)$ perusjärjestelmä.

Ratk. Yhtälö on lineaarinen ja homogeeninen.
Merkitään $A(t) = \dfrac{1}{1+t}\begin{pmatrix}1+2t & -2t\\ t & 1-t\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$, kun $t \neq -1$. Tällöin A on määritelty ja jatkuva väleillä $]-\infty,-1[$ ja $]-1,\infty[$, mutta ei koko $\mathbb{R}$:ssä. Kysymystä on siis tutkittava erikseen kummallakin näistä väleistä.
Olkoon $x^1(t) = \begin{pmatrix}1+t\\1+t\end{pmatrix}$ ja $x^2(t) = \begin{pmatrix}2e^t\\e^t\end{pmatrix}$, kun $t \neq -1$.
Osoitetaan ensin, että x^1 ja x^2 toteuttavat yhtälön (**3 pistettä**): kaikilla $t \neq -1$ on

$$A(t)x^1(t) = \frac{1}{1+t}\begin{pmatrix}1+2t & -2t\\ t & 1-t\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1+t\\1+t\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1+2t & -2t\\ t & 1-t\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1+2t-2t\\ t+1-t\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} = \dot{x}^1(t) \quad \text{ja}$$

$$\begin{aligned}A(t)x^2(t) &= \frac{1}{1+t}\begin{pmatrix}1+2t & -2t\\ t & 1-t\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2e^t\\e^t\end{pmatrix} = \frac{1}{1+t}\begin{pmatrix}2(1+2t)e^t + (-2t)e^t\\ 2te^t + (1-t)e^t\end{pmatrix} = \frac{1}{1+t}\begin{pmatrix}(2+2t)e^t\\(1+t)e^t\end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix}2e^t\\e^t\end{pmatrix} = \dot{x}^2(t).\end{aligned}$$

Osoitetaan sitten Wronskin determinantilla, että (x^1, x^2) on vapaa pari kummallakin välillä (**3 pistettä**):

$$W(x^1,x^2)(t) = \begin{vmatrix}1+t & 2e^t\\ 1+t & e^t\end{vmatrix} = (1+t)e^t - 2(1+t)e^t = -(1+t)e^t \neq 0 \quad \text{kaikilla } t \neq -1.$$

Siis (x^1, x^2) on kummallakin välillä yhtälön perusjärjestelmä.
Arvostelusta. Pisteen $t = -1$ poissulkemisen tuli näkyä jossain. Esimerkiksi $W(x^1,x^2)(0) = -1 \neq 0$ osoittaa vapauden vain välillä $]-1,\infty[$ (**sakkoa 1 piste**). Jos laski $W(\dot{x}^1,\dot{x}^2)(t) = -e^t \neq 0$ kaikilla $t \in \mathbb{R}$, **menetti 2 pistettä**, sillä vaikkakin tästä ehdosta seuraa, että (x^1,x^2) on vapaa jokaisella surkastumattomalla välillä $I \subset \mathbb{R}$ [todistus, joka olisi pitänyt esittää: jos (x^1,x^2) on sidottu välillä I, niin on olemassa vakiot $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$, $c_1^2 + c_2^2 > 0$, joilla $c_1x^1(t) + c_2x^2(t) = 0 \ \ \forall t \in I$, jolloin myös $c_1\dot{x}^1(t) + c_2\dot{x}^2(t) = 0$ ja siis $W(\dot{x}^1,\dot{x}^2)(t) = 0 \ \ \forall t \in I$], niin käänteinen väite ei yleensä päde edes (2-ulotteisen) lineaarisen homogeenisen yhtälön $\dot{x}(t) = A(t)x(t)$ kahdelle ratkaisulle x^1, x^2 [ajattele esimerkiksi tapausta $A(t) = 0 \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ $\forall t \in \mathbb{R}$], joten derivaattojen Wronskin determinanttia on tuskin käsitelty luentojen teoriassa.

2. Määritä differentiaaliyhtälöryhmän

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -2y - 2z\\ \dot{y} &= 2x + 5y + 3z\\ \dot{z} &= -2x - 4y - 2z\end{aligned}$$

kaikki ratkaisut.
Ratk. *Matriisimenetelmää* varten määritellään

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix}0 & -2 & -2\\ 2 & 5 & 3\\ -2 & -4 & -2\end{pmatrix},$$

jolloin ryhmä saa muodon $\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x}$, jossa A on vakiomatriisi. Matriisin A karakteristisen polynomin

$$\begin{aligned}\det(\lambda I - A) &= \begin{vmatrix}\lambda & 2 & 2\\ -2 & \lambda-5 & -3\\ 2 & 4 & \lambda+2\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}\lambda & 2 & 2\\ -2 & \lambda-5 & -3\\ 0 & \lambda-1 & \lambda-1\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}\lambda & 0 & 2\\ -2 & \lambda-2 & -3\\ 0 & 0 & \lambda-1\end{vmatrix} = (\lambda-1)\begin{vmatrix}\lambda & 0\\ -2 & \lambda-2\end{vmatrix}\\ &= (\lambda-1)\lambda(\lambda-2) \ \ (= \lambda^3 - 3\lambda^2 + 2\lambda)\end{aligned}$$

(determinantissa ensin lisättiin toinen rivi kolmanteen riviin ja sitten vähennettiin kolmas sarake toisesta sarakkeesta) juuret eli A:n ominaisarvot ovat $\lambda = 0$, 1 ja 2 (**2 pistettä**). Etsitään vastaavat ominaisvektorit $u = (a \quad b \quad c)^T \neq 0$ (ominaisavaruudet ovat nyt yksiulotteiset):

$$\det(0I - A)u = 0 \iff \begin{cases} 2b + 2c = 0 \\ -2a - 5b - 3c = 0 \\ 2a + 4b + 2c = 0 \end{cases} \iff \text{(Gaussin eliminoinnilla:)} \begin{vmatrix} 0 & 2 & 2 \\ -2 & -5 & -3 \\ 2 & 4 & 2 \end{vmatrix}$$

$$\iff \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} \iff \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \iff \begin{cases} a = -b \\ c = -b \end{cases} \iff \exists \alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \text{ s.e. } u = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix};$$

$$\det(1I - A)u = 0 \iff \begin{cases} a + 2b + 2c = 0 \\ -2a - 4b - 3c = 0 \\ 2a + 4b + 3c = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} a = -2b \\ c = 0 \end{cases} \iff \exists \alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \text{ s.e. } u = \alpha \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix};$$

$$\det(2I - A)u = 0 \iff \begin{cases} 2a + 2b + 2c = 0 \\ -2a - 3b - 3c = 0 \\ 2a + 4b + 4c = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} a = 0 \\ b = -c \end{cases} \iff \exists \alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \text{ s.e. } u = \alpha \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Valitsemalla näissä $\alpha = 1$ saadaan $\mathbb{R}^3$:lle kanta (u_1, u_2, u_3). Siis yhtälön täydellinen ratkaisu on (perusjärjestelmää $(u_1, e^t u_2, e^{2t} u_3)$ ei ole välttämätöntä erikseen kirjoittaa)

$$\mathbf{x}(t) = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2 e^t \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + C_3 e^{2t} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{kaikilla } t \in \mathbb{R} \quad (C_1, C_2, C_3 \in \mathbb{R}).$$

Vaihtoehtoisessa *eliminointimenetelmässä* (kaksi yritti, mutta sai kirjoitettua vain seuraavan differentiaaliyhtälön:) kolmas yhtälö voidaan toisen yhtälön avulla korvata yhtälöllä $(y + z)^{\cdot} = y + z$, jonka ratkaisu on $y + z = Ae^t \quad (A \in \mathbb{R})$. Tämän nojalla ensimmäinen yhtälö voidaan korvata yhtälöllä $\dot{x} = -2(y + z) = -2Ae^t$, jonka ratkaisu on $x(t) = -2Ae^t + B \quad (B \in \mathbb{R})$. Silloin toinen yhtälö saa muodon $\dot{y} = 2x + 2y + 3(y + z) = -4Ae^t + 2B + 2y + 3Ae^t$ eli muodon $\dot{y} - 2y = -Ae^t + 2B$ eli yhtäpitävästi muodon $(d/dt)(e^{-2t}y) = -Ae^{-t} + 2Be^{-2t}$, jonka ratkaisu taas on $y(t) = e^{2t}(Ae^{-t} - Be^{-2t} + C) = Ae^t - B + Ce^{2t}$ $(C \in \mathbb{R})$. Silloin $z(t) = Ae^t - y(t) = B - Ce^{2t}$. Näin ollen yhtälöryhmän ratkaisu on sama kuin yllä, nimittäin

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2Ae^t + B \\ Ae^t - B + Ce^{2t} \\ B - Ce^{2t} \end{pmatrix} = B \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + Ae^t \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + (-C)e^{2t} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

3. Osoita, että origo on differentiaaliyhtälöryhmän $\begin{cases} \dot{x} = -5x + 4y + x^2 y \\ \dot{y} = -2x + y + xy^2 \end{cases}$ tasapainokohta. Onko origo stabiili?

Ratk. Olkoon $f_1(x, y) = -5x + 4y + x^2 y$ ja $f_2(x, y) = -2x + y + xy^2$, kun $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Tällöin $f_1(0, 0) = 0$ ja $f_2(0, 0) = 0$, joten origo on todellakin systeemin tasapainokohta (**1 piste**).
Linearisoidaan. Kuvauksen $f = (f_1, f_2) \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ Jacobin matriisi

$$J_f(x, y) = \begin{pmatrix} \partial_1 f_1 & \partial_2 f_1 \\ \partial_1 f_2 & \partial_2 f_2 \end{pmatrix}(x, y) = \begin{pmatrix} -5 + 2xy & 4 + x^2 \\ -2 + y^2 & 1 + 2xy \end{pmatrix}$$

origossa on $A = J_f(0, 0) = \begin{pmatrix} -5 & 4 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$. Matriisin A karakteristisen yhtälön $\det(\lambda I - A) = \begin{vmatrix} \lambda + 5 & -4 \\ 2 & \lambda - 1 \end{vmatrix} = \lambda^2 + 4\lambda + 3 = (\lambda + 1)(\lambda + 3) = 0$ juuret ovat $\lambda_1 = -1$ ja $\lambda_2 = -3$ ja ne ovat siis reaaliset (ja erisuuret). Koska λ_1 ja λ_2 ovat negatiivisia, origo *on (jopa eksponentiaalisesti) stabiili tasapainokohta*.

Huom. Myös seuraava tapa linearisoida origossa hyväksyttiin. Kirjoitetaan yhtälö muotoon $(\dot{x},\dot{y})^T = A(x,y)(x,y)^T$, jossa $A(x,y) = \begin{pmatrix} -5 & 4+x^2 \\ -2+y^2 & 1 \end{pmatrix}$ on jatkuva origossa; tällöin linearisoitu yhtälö on $(\dot{x},\dot{y})^T = A(0,0)(x,y)^T$. Näin on, koska kirjoittamalla $A(x,y)(x,y)^T = A(0,0)(x,y)^T + |(x,y)|\varepsilon(x,y)$ on $|\varepsilon(x,y)| = \dfrac{\big|\big(A(x,y)-A(0,0)\big)(x,y)^T\big|}{|(x,y)|} \leq |A(x,y)-A(0,0)| \to 0$ (lopussa matriisien operaattorinormi), kun $(x,y)\to(0,0)$.

Arvostelusta. Jos huolimattomuusvirheiden tähden oli johtunut muunlaisiin ominaisarvoihin kuin negatiivisiin, mutta tehnyt sitten niistä siinä tilanteessa oikeat johtopäätökset, menetti **2 pistettä**.

4. Määritä systeemin $\begin{cases} \dot{x} &= xy, \\ \dot{y} &= 1-y^2 \end{cases}$ tasapainokohdat ja tutki niiden stabiilisuutta. Piirrä faasikuvio.

Ratk. Olkoon $f_1(x,y) = xy$ ja $f_2(x,y) = 1-y^2$, kun $(x,y)\in\mathbb{R}^2$. Tällöin (**1 piste**):

$$(x,y) \text{ on tasapainokohta} \iff \begin{cases} f_1(x,y)=0 \\ f_2(x,y)=0 \end{cases} \iff \begin{cases} x=0 \text{ tai } y=0 \\ y=1 \text{ tai } y=-1 \end{cases} \iff \underline{(x,y)=(0,1)} \text{ tai } \underline{(x,y)=(0,-1)}.$$

Kuvauksen $f = (f_1,f_2)\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ Jacobin matriisi on

$$J_f(x,y) = \begin{pmatrix} \partial_1 f_1 & \partial_2 f_1 \\ \partial_1 f_2 & \partial_2 f_2 \end{pmatrix}(x,y) = \begin{pmatrix} y & x \\ 0 & -2y \end{pmatrix}.$$

Matriisit $J_f(0,1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$ ja $J_f(0,-1) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ ovat lävistäjämatriiseja, joten niiden ominaisarvot ovat 1 ja -2 sekä vastaavasti -1 ja 2. Koska molemmilla matriiseilla on positiivinen ominaisarvo, niin tasapainokohdat $(0,1)$ ja $(0,-1)$ ovat <u>epästabiileja</u>. (Tarkemmin sanoen, koska kummallakin matriisilla ominaisarvot ovat erimerkkiset, tasapainokohdat ovat satulapisteitä.) (**2 pistettä**)

Faasikuvion (**3 pistettä**; oikea piirros riitti; seuraavia perusteluita ei tarvittu) pystynuolia ($f_1 = 0$, $f_2 \neq 0$) varten huomataan:
Jos $x=0$, niin $f_1=0$, $f_2>0$ (ylös), kun $|y|<1$, ja $f_2<0$ (alas), kun $|y|>1$.
Jos $y=0$, niin $f_1=0$ ja $f_2=1>0$.

Faasikuvion vaakanuolia ($f_2=0$, $f_1\neq 0$) varten huomataan:
Jos $y=1$, niin $f_2=0$, $f_1=x>0$ (oikealle), kun $x>0$, ja $f_1<0$ (vasemmalle), kun $x<0$.
Jos $y=-1$, niin $f_2=0$, $f_1=-x>0$, kun $x<0$, ja $f_1<0$, kun $x>0$.

Vinot nuolet voidaan päätellä näistä nuolista sen nojalla, että koska funktiot f_1 ja f_2 ovat jatkuvia, ne eivät muuta merkkiään muuta kuin nollakohdissaan.

Vinot nuolet voi myös päätellä seuraavista epäyhtälöistä:
Jos $x>0$ ja $y>1$, niin $\dot{x}>0$ ja $\dot{y}<0$.
Jos $x<0$ ja $y>1$, niin $\dot{x}<0$ ja $\dot{y}<0$.
Jos $x>0$ ja $0<y<1$, niin $\dot{x}>0$ ja $\dot{y}>0$.
Jos $x<0$ ja $0<y<1$, niin $\dot{x}<0$ ja $\dot{y}>0$.
Jos $x>0$ ja $-1<y<0$, niin $\dot{x}<0$ ja $\dot{y}>0$.
Jos $x<0$ ja $-1<y<0$, niin $\dot{x}>0$ ja $\dot{y}>0$.
Jos $x>0$ ja $y<-1$, niin $\dot{x}<0$ ja $\dot{y}<0$.
Jos $x<0$ ja $y<-1$, niin $\dot{x}>0$ ja $\dot{y}<0$.

Huom. Jos päätteli pelkän faasikuvion perusteella, että tasapainokohdat $(0,\pm 1)$ ovat epästabiileita, menetti **1 pisteen**, sillä olisi tarvittu perustelu joko teorian avulla tai systeemin sopivat erikoistapaukset ratkaisemalla, että tietyt radat eivät jää lyhyiksi, vaan etääntyvät äärettömyyteen. Esimerkiksi, olipa $\xi>0$ kuinka pieni tahansa, niin $(x(t),y(t)) = (\xi e^t, 1)$ on ratkaisu, jolla $|(x(0),y(0))-(0,1)| = \xi$ ja jolla $|(x(t),y(t))-(0,1)| \to \infty$, kun $t\to\infty$. Tapauksessa $\eta < -1$ ei ratkaisuun, jolla $(x(0),y(0)) = (0,\eta)$, riitä kurssin Diff.yht. I kotisivulla olevan luentomateriaalin (versio 9.10.2008) sivun 72 Lause 5.9, sillä aikavälin oikea päätepiste on nyt äärellinen, kuten separoituva alkuarvotehtävä $\dot{y} = 1-y^2$, $y(0)=\eta$, ratkaisemalla nähtäisiin.