Differentiaaliyhtälöt II, harjoitus 2, 11.–13.11.2008, ratkaisut (JL), 2 sivua

1. Määritellään funktiot $x_1, x_2 \in C(\mathbb{R})$ asettamalla $x_1(t) = \cos t$ ja $x_2(t) = \sin t$, kun $t \in \mathbb{R}$. On osoitettava, että x_1 ja x_2 ovat lineaarisesti riippumattomia.

Ratk. Lasketaan parin (x_1, x_2) Wronskin determinantti:

$$W(x_1,x_2)(t) = \begin{vmatrix} x_1(t) & x_2(t) \\ \dot{x}_1(t) & \dot{x}_2(t) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{vmatrix} = \cos t\,\cos t - (-\sin t)\sin t = \cos^2 t + \sin^2 t = 1 \neq 0 \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Täten pari (x_1, x_2) on lineaarisesti riippumaton eli vapaa, koska muutoin olisi $W(x_1,x_2)(t) = 0$ $\forall t \in \mathbb{R}$.

II tapa. Jos (x_1, x_2) on lineaarisesti riippuva eli sidottu, niin $x_1 = \lambda x_2$ tai $x_2 = \lambda x_1$ jollain $\lambda \in \mathbb{R}$, jolloin voidaan olettaa, että edellinen pätee, koska jälkimmäisessä on välttämättä $\lambda \neq 0$; nyt $1 = \cos 0 = \lambda \sin 0 = \lambda \cdot 0 = 0$; ristiriita.

2. Määritellään funktiot $x_1, x_2, x_3 \in C(\mathbb{R})$ seuraavasti: $x_1(t) = \cos 2t$, $x_2(t) = \sin^2 t$ ja $x_3(t) = 1$, kun $t \in \mathbb{R}$. On osoitettava, että x_1, x_2 ja x_3 ovat lineaarisesti riippuvia.

Ratk. Koska $x_1(t) = \cos 2t = 1 - 2\sin^2 t$ $\forall t \in \mathbb{R}$, niin $x_1 = x_3 - 2x_2$. Täten $c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3 = 0$ kertoimin $(c_1, c_2, c_3) = (1, 2, -1) \neq (0, 0, 0)$. Siis kolmikko (x_1, x_2, x_3) on sidottu.

3. Olkoon $A(t)$ (2×2)-matriisi. Onko mahdollista, että sekä $x_1(t) = \begin{pmatrix} e^t \\ e^{2t} \end{pmatrix}$ että $x_2(t) = \begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{4t} \end{pmatrix}$ toteuttavat yhtälön $\dot{x}(t) = A(t)x(t)$?

Ratk. Tutkitaan kysymystä Wronskin determinantilla funktioiden x_1 ja x_2 koko määrittelyvälillä $\mathbb{R}$:

$$W(x_1,x_2)(t) = \begin{vmatrix} e^t & e^{2t} \\ e^{2t} & e^{4t} \end{vmatrix} = e^t e^{4t} - e^{2t}e^{2t} = e^{5t} - e^{4t} = e^{4t}(e^t - 1) = 0 \Longleftrightarrow e^t = 1 \Longleftrightarrow t = 0.$$

Koska $W(x_1, x_2)$ siis häviää yhdessä pisteessä, mutta ei kaikkialla, niin ei ole olemassa jatkuvaa funktiota $A\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{2\times 2}$, jolla $\dot{x}_k(t) = A(t)x_k(t)$ $\forall t \in \mathbb{R}$, kun $k = 1, 2$.

II tapa. Jos x_1 ja x_2 toteuttavat yhtälön $\dot{x}(t) = A(t)x(t)$ $\mathbb{R}$:ssä, niin $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \dot{x}_1(0) = A(0)x_1(0) = A(0)\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = A(0)x_2(0) = \dot{x}_2(0) = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$; ristiriita.

Huom. Entä, jos $t = 0$ jätetään pois A:n määrittelyvälistä? Olkoon $\Delta = \,]-\infty, 0[$ tai $\Delta = \,]0, \infty[$, ja olkoon $X(t) = (\, x_1(t) \quad x_2(t)\,) = \begin{pmatrix} e^t & e^{2t} \\ e^{2t} & e^{4t} \end{pmatrix}$ $\forall t \in \Delta$. Tällöin $\det X(t) = W(x_1,x_2)(t) \neq 0$ $\forall t \in \Delta$, joten matriisilla $X(t)$ on käänteismatriisi $X(t)^{-1}$ kaikilla $t \in \mathbb{R}$. Täten, jos asetetaan $A(t) = \dot{X}(t)X(t)^{-1}$ $\forall t \in \Delta$, niin $A\colon \Delta \to \mathbb{R}^{2\times 2}$ on jatkuva matriisifunktio, jolla $\dot{X}(t) = A(t)X(t)$ eli $\dot{x}_k(t) = A(t)x_k(t)$ $\forall k = 1, 2$ välillä Δ.

4. On osoitettava, että $\left(\begin{pmatrix} 2 \\ e^t \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e^{-t} \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ on yhtälön $\dot{x}(t) = \begin{pmatrix} 1 & -2e^{-t} \\ e^t & -1 \end{pmatrix} x(t)$ perusjärjestelmä.

Ratk. Merkitään $x_1(t) = \begin{pmatrix} 2 \\ e^t \end{pmatrix}$, $x_2(t) = \begin{pmatrix} e^{-t} \\ 1 \end{pmatrix}$ ja $A(t) = \begin{pmatrix} 1 & -2e^{-t} \\ e^t & -1 \end{pmatrix}$ $\forall t \in \mathbb{R}$. Tällöin

$$A(t)x_1(t) = \begin{pmatrix} 1 & -2e^{-t} \\ e^t & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ e^t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\cdot 2 + (-2e^{-t})e^t \\ e^t \cdot 2 + (-1)e^t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-2 \\ 2e^t - e^t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ e^t \end{pmatrix} = \dot{x}_1(t) \quad \text{ja}$$
$$A(t)x_2(t) = \begin{pmatrix} 1 & -2e^{-t} \\ e^t & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e^{-t} \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{-t} - 2e^{-t} \\ 1 - 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -e^{-t} \\ 0 \end{pmatrix} = \dot{x}_2(t),$$

joten x_1 ja x_2 ovat yhtälön $\dot{x}(t) = A(t)x(t)$ ratkaisuita ($\mathbb{R}$:ssä). Edelleen

$$W(x_1,x_2)(t) = \begin{vmatrix} 2 & e^{-t} \\ e^t & 1 \end{vmatrix} = 2 - 1 = 1 \neq 0 \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Siis (x_1, x_2) on myös vapaa. Täten (x_1, x_2) on yhtälön $\dot{x} = Ax$ perusjärjestelmä.

5. On etsittävä yhtälön

$$(*) \qquad \dot{x}(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ t & 1 \end{pmatrix} x(t)$$

jokin perusjärjestelmä.

Ratk. Merkitään $x(t) = \begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \end{pmatrix}$. Tällöin

$$(*) \iff \begin{pmatrix} \dot{u}(t) \\ \dot{v}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ t & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u(t) \\ tu(t) + v(t) \end{pmatrix} \iff \begin{cases} \dot{u}(t) = u(t) \\ \dot{v}(t) = tu(t) + v(t) \end{cases}.$$

Tässä $\dot{u}(t) = u(t) \iff u(t) = C_1 e^t$ jollain $C_1 \in \mathbb{R}$ (eksponentiaalisen kasvun yhtälö!). Kullakin C_1 saadaan lineaarinen yhtälö $\dot{v}(t) - v(t) = C_1 t e^t$, jolla on integroiva tekijä $\mu(t) = e^{\int (-1) dt} = e^{-t}$ (lineaaristen, ei eksaktien yhtälöiden mielessä; -1 tulee $v(t)$:n kertoimesta). Nyt

$$\dot{v}(t) - v(t) = C_1 t e^t \iff e^{-t}\dot{v}(t) - e^{-t}v(t) = C_1 t \iff \frac{d}{dt}\left(e^{-t}v(t)\right) = C_1 t$$

$$\iff e^{-t}v(t) = \int C_1 t \, dt = \tfrac{1}{2}C_1 t^2 + C_2 \quad (\text{jollain } C_2 \in \mathbb{R}) \iff v(t) = \tfrac{1}{2}C_1 t^2 e^t + C_2 e^t.$$

Täten

$$(*) \iff x(t) = \begin{pmatrix} C_1 e^t \\ \frac{1}{2}C_1 t^2 e^t + C_2 e^t \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} e^t \\ \frac{1}{2}t^2 e^t \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} 0 \\ e^t \end{pmatrix} = C_1 x^1(t) + C_2 x^2(t),$$

jossa $x^1(t) = \begin{pmatrix} e^t \\ \frac{1}{2}t^2 e^t \end{pmatrix}$ ja $x^2(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ e^t \end{pmatrix}$. Siis x^1 ja x^2 ovat (*):n ratkaisuja (saadaan valinnoin $(C_1, C_2) = (1, 0)$ ja $(C_1, C_2) = (0, 1)$), ja yhtälön (*) ratkaisut ovat parin (x^1, x^2) lineaarikombinaatiot. Näin ollen (x^1, x^2) **virittää** ratkaisuavaruuden, jonka tiedetään olevan kaksiulotteinen; täten (x^1, x^2) on myös vapaa. Siis (x^1, x^2) on perusjärjestelmä.

II tapa. Valitaan yhtälölle $\dot{u} = u$ vain ratkaisut $u(t) = 0$ ja $u(t) = e^t$. Tällöin saadaan vastaavasti yhtälö $\dot{v}(t) - v(t) = 0$, jolle valitaan ratkaisu $v(t) = e^t$, tai yhtälö $\dot{v}(t) - v(t) = te^t$, jolle valitaan ratkaisu $v(t) = \frac{1}{2}t^2 e^t$ (voidaan menetellä kuten yllä tai tehdä yrite $v(t) = at^2 e^t$ vakiolla $a \in \mathbb{R}$, jolloin tulee ehto $2ate^t = te^t$ eli $t = \frac{1}{2}$). Näin saadaan samat (*):n ratkaisut x^2 ja x^1 kuin yllä. Mutta nyt on osoitettava, että pari (x^2, x^1) on **vapaa**, jotta voidaan päätellä, että (x^2, x^1) on perusjärjestelmä. Tehdään tämä Wronskin determinantilla: $W(x_2, x_1)(t) = \begin{vmatrix} 0 & e^t \\ e^t & \frac{1}{2}t^2 e^t \end{vmatrix} = -e^{2t} \neq 0 \ \forall t \in \mathbb{R}$.

III tapa. Tehdään yrite $x(t) = e^{\lambda t} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$, jossa $\lambda, u, v \in \mathbb{R}$ ja $(u, v) \neq (0, 0)$. Tällöin kullakin t on λ:n oltava matriisin $A(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ t & 1 \end{pmatrix}$ ominaisarvo ja vektorin $\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$ vastaava $A(t)$:n ominaisvektori. Mutta $A(t)$ on alakolmiomatriisi, jonka ominaisarvot ovat silloin halkaisijalla; nyt $\lambda = 1$ on ainoa ominaisarvo, ja ominaisvektoriehdoksi tulee, että $(A(t) - I)\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = 0 \iff \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ t & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ tu \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff tu = 0$ kullakin $t \in \mathbb{R}$ eli yhtäpitävästi $u = 0$. Näin saadaan t:stä riippumaton ominaisvektori $\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ ja siis (*):n yksi ratkaisu $e^t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, joka on sama kuin x^2 yllä.

Käytetään sitten vakioiden variointia ominaisvektoriin eli tehdään yrite $x(t) = e^t \begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \end{pmatrix}$. Saadaan ehto

$$e^t \begin{pmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \end{pmatrix} + e^t \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = A(t) e^t \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = e^t \begin{pmatrix} u \\ tu + v \end{pmatrix} \iff \begin{cases} \dot{u} + u = u \\ \dot{v} + v = tu + v \end{cases} \iff \begin{cases} \dot{u} = 0 \\ \dot{v} = tu \end{cases},$$

joka on yksinkertaisempi differentiaaliyhtälöryhmä kuin yllä. Yhtälölle $\dot{u} = 0$ valitaan ratkaisu $u(t) = 1$ ja saatavalle yhtälölle $\dot{v} = t$ sitten ratkaisu $v(t) = \frac{1}{2}t^2$. Näin saadaan (*):n yksi ratkaisu $e^t \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{2}t^2 \end{pmatrix}$, joka on sama kuin x^1 yllä. Koska $W(x^2, x^1)(t) \neq 0 \ \forall t \in \mathbb{R}$, kuten yllä osoitettiin, on (x^2, x^1) perusjärjestelmä.