Differentiaaliyhtälöt II, harjoitus 1, 4.–6.11.2008, ratkaisut (JL), 2 sivua

Huom. 1) Käytetyt metristen avaruuksien käsitteet ja tulokset on selostettu Topologia I:n kurssilla; ks. Jussi Väisälän oppikirja *Topologia I*.
2) Diff.yht. I:n kurssikokeen 14.10.2008 ratkaisuissa (verkossakin) on käytetty 1. kertaluvun differentiaaliyhtälöryhmän alkuarvotehtävän ratkaisun olemassaolo- ja yksikäsitteisyyslausetta SIR-tautimallin perinpohjaiseen tarkasteluun; luennoilla sellaiseen tarkasteluun oli viitattu.

1. Olkoon (X, d) metrinen avaruus ja $f\colon X \to X$ kontraktio. On osoitettava, että f on jatkuva.
On siis olemassa vakio $0 \le k < 1$, jolla f on k-kontraktio eli jolla $d(f(x), f(y)) \le kd(x, y)$ kaikilla $x, y \in X$. Olkoon $x_0 \in X$. Olkoon $\varepsilon > 0$. Määritellään $\delta = \varepsilon > 0$. Tällöin, kun $x \in X$ ja $d(x, x_0) < \delta$, niin $d(f(x), f(x_0)) \le kd(x, x_0) < 1 \cdot \delta = \varepsilon$. Siis f on jatkuva pisteessä x_0. (Huom. Koska δ ei riippunut x_0:sta, on f jopa tasaisesti jatkuva X:ssä.)

2. Olkoon $X = (0, 1)$ varustettuna metriikalla $d(x, y) = |x - y|$. Asetetaan $F(x) = \frac{1}{2}(x - \frac{1}{2})^2 + \frac{7}{8} \in \mathbb{R}$, kun $x \in X$.
Näin tulee määritellyksi kuvaus $F\colon X \to X$, sillä jos $x \in (0, 1)$, niin selvästi $F(x) \ge \frac{7}{8} > 0$ ja $F(x) < \frac{1}{2}(\frac{1}{2})^2 + \frac{7}{8} = \frac{1}{8} + \frac{7}{8} = 1$, joten $F(x) \in (0, 1)$. Koska $|F'(x)| = |x - \frac{1}{2}| < \frac{1}{2}$ kaikilla $x \in (0, 1)$, niin väliarvolauseen nojalla kaikilla $x, y \in (0, 1)$ on olemassa $\xi \in [x, y] \cup [y, x] \subset (0, 1)$, jolla $F(x) - F(y) = F'(\xi)(x - y)$ ja siis $|F(x) - F(y)| = |F'(\xi)||x - y| \le \frac{1}{2}|x - y|$. Täten F on X:n k-kontraktio kertoimella $k = \frac{1}{2} < 1$.
Derivaattaa käyttämättä: $|F(x) - F(y)| = \frac{1}{2}|(x - \frac{1}{2})^2 - (y - \frac{1}{2})^2| = \frac{1}{2}|x - y||x + y - 1| \le \frac{1}{2}|x - y|$, sillä tässä $-1 = 0 + 0 - 1 < x + y - 1 < 1 + 1 - 1 = 1$ ja siis $|x + y - 1| < 1$.
Kuitenkaan F:llä ei ole kiintopistettä X:ssä, sillä $F(x) - x = \frac{1}{2}(x - \frac{1}{2})^2 + \frac{7}{8} - x = \frac{1}{2}(x^2 - x + \frac{1}{4} + \frac{7}{4} - 2x) = \frac{1}{2}(x^2 - 3x + 2) = \frac{1}{2}(x - 1)(x - 2) > 0$ ja siis $F(x) \ne x$ kaikilla $x \in (0, 1)$. Tulos ei kumoa Banachin kiintopistelausetta, sillä metrinen avaruus X ei ole täydellinen (muutoinhan X:n tulisi olla $\mathbb{R}$:n suljettu osajoukko).

3. Olkoon $X = [1, \infty)$ varustettuna metriikalla $d(x, y) = |x - y|$. Asetetaan $F(x) = x + 1/x \in \mathbb{R}$, kun $x \in X$. Tällöin $F(x) > x \ge 1$ kaikilla $x \in X$, joten F on kiintopisteetön kuvaus $X \to X$. Koska X on täydellinen metrinen avaruus $\mathbb{R}$:n suljettuna osajoukkona, niin Banachin kiintopistelauseen tähden F ei ole X:n kontraktio. Tutkitaan vielä suoraan, kuinka etäisyyksille käy kuvauksessa F.

I tapa: derivaatan avulla. Koska $|F'(x)| = \left|1 - \dfrac{1}{x^2}\right| = 1 - \dfrac{1}{x^2} < 1$ kaikilla $x \ge 1$, niin väliarvolauseen nojalla on $|F(x) - F(y)| < |x - y|$, kun $x, y \ge 1$ ja $x \ne y$. Koska $|F'(x)| \to 1$, kun $x \to \infty$, niin $\sup_{x \ge 1} |F'(x)| = 1$, joten F ei ole kontraktio. Muutoin nimittäin olisi olemassa luku $0 \le k < 1$, jolla F olisi k-kontraktio eli jolla $|F(x) - F(y)| \le k|x - y|$ kaikilla $x, y \ge 1$, mistä taas seuraisi, että

$$|F'(x)| = \lim_{h \to 0} \frac{|F(x + h) - F(x)|}{|h|} \le k < 1 \quad \text{kaikilla } x \ge 1 \text{ ja siis} \quad \sup_{x \ge 1} |F'(x)| \le k.$$

II tapa: käyttämättä derivaattaa. Kun $x, y \in X$, niin

$$|F(x) - F(y)| = \left|\left(x + \frac{1}{x}\right) - \left(y + \frac{1}{y}\right)\right| = \left|(x - y) - \frac{x - y}{xy}\right| = \left|1 - \frac{1}{xy}\right| |x - y|,$$

jossa $xy \geq 1 > 0$ ja siis $0 < \dfrac{1}{xy} \leq 1$ eli $\left|1 - \dfrac{1}{xy}\right| = 1 - \dfrac{1}{xy} < 1$. Täten $d(F(x), F(y)) < d(x, y)$, kun $x, y \in X$ ja $x \neq y$.
Mutta F ei ole X:n kontraktio, sillä koska esimerkiksi

$$\frac{|F(x) - F(1)|}{|x - 1|} = 1 - \frac{1}{x} \to 1, \quad \text{kun } 1 < x \to \infty,$$

niin ei voi olla olemassa lukua $0 \leq k < 1$, jolla F olisi k-kontraktio.
4. On osoitettava, että lausekkeen $f(x) = \sqrt{x}$ antama funktio välillä $I = [0, 1]$ ei ole Lipschitzin mielessä jatkuva eli Lipschitz-kuvaus. Tämä seuraa siitä, että

$$\frac{|f(x) - f(0)|}{|x - 0|} = \frac{\sqrt{x}}{x} = \frac{1}{\sqrt{x}} \to \infty, \quad \text{kun } 0 < x \to 0,$$

sillä tällöin ei voi olla olemassa sellaista vakiota $0 \leq L < \infty$, jolla $|f(x) - f(y)| \leq L|x - y|$ kaikilla $x, y \in I$ eli jolla f olisi L-Lipschitz.
Väite seuraa myös siitä, että $|f'(x)| = \dfrac{1}{2\sqrt{x}} \to \infty$, kun $x \to 0+$, sillä tällöin f' ei ole rajoitettu välillä $]0, 1]$, ja kuitenkin, jos f olisi L-Lipschitz jollain L, niin olisi $|f'(x)| \leq L$ kaikilla $x \in (0, 1]$, joten f' olisi rajoitettu välillä $(0, 1]$.
5. Olkoon $I, D \subset \mathbb{R}$. Asetetaan $f(t, x) = e^{t+x}$, kun $(t, x) \in I \times D$. On tutkittava annetuissa tapauksissa, toteuttaako f tasaisen Lipschitz-ehdon (toisen muuttujan suhteen) joukossa $I \times D$ eli päteekö

$$|f(t, x) - f(t, y)| \leq L|x - y| \quad \text{kaikilla } t \in I,\ x, y \in D$$

jollekin $0 \leq L < \infty$.
(a) $I = [0, 1]$, $D = [0, 1]$. Nyt, kun $t, x, y \in [0, 1]$, niin

$$|f(t, x) - f(t, y)| = |e^{t+x} - e^{t+y}| = e^t|e^x - e^y| \leq e|e^x - e^y|,$$

jossa väliarvolauseen perusteella $|e^x - e^y| = e^{\xi}|x - y| \leq e|x - y|$ eräällä $\xi \in [0, 1]$; tällöin $|f(t, x) - f(t, y)| \leq e^2|x - y|$. Siis tasainen Lipschitz-ehto pätee vakiolla $L = e^2$.
Tai: Koska $D_2 f(t, x) = \frac{\partial}{\partial x} e^{t+x} = e^{t+x}$, niin $\sup_{(t,x) \in I \times D} |D_2 f(t, x)| = e^{1+1} = e^2$, josta väliarvolauseen nojalla seuraa ylläoleva tasainen Lipschitz-ehto.
(b) $I = [0, 1]$, $D = \mathbb{R}$. Nyt

$$\frac{|f(0, x) - f(0, 0)|}{|x - 0|} = \frac{e^x - 1}{x} \to \infty, \quad \text{kun } 0 < x \to \infty.$$

Tällöin ei voi päteä tasainen Lipschitz-ehto. (Se ei siis pätisi, vaikka olisi $I = \{0\}$.)
Tai: $\sup_{(t,x) \in I \times D} |D_2 f(t, x)| \geq \lim_{x \to \infty} |D_2 f(0, x)| = \lim_{x \to \infty} e^x = \infty$, josta väite seuraa.
(c) $I = \mathbb{R}$, $D = \mathbb{R}$. Tietysti (b)-kohdasta seuraa, että tasainen Lipschitz-ehto ei päde nytkään.
(d) $I = \mathbb{R}$, $D = [0, 1]$. Tämä ylimääräinen kohta jätetään harjoitustehtäväksi. (Osoita, että tasainen Lipschitz-ehto ei päde.)