Differentialekvationer II

Räkneövning 4, höstterminen 2008

1. Betrakta det linjära begynnelsevärdesproblemet

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t), \\ x(0) &= \xi. \end{aligned}$$

Undersök origos stabilitet (med andra ord, undersök huruvida origo är instabilt, stabilt, asymptotiskt stabilt eller exponentiellt stabilt) då

(a) $A = \begin{pmatrix} -1 & -4 & -2 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 4 & 1 \end{pmatrix}$, (b) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & -1 \\ -1 & -1 & -2 \end{pmatrix}$,

(c) $A = \begin{pmatrix} -2 & -1 & -2 \\ -1 & -1 & -1 \\ 3 & 2 & 3 \end{pmatrix}$, (d) $A = \begin{pmatrix} -8 & -2 & -6 \\ 4 & 1 & 3 \\ 8 & 2 & 6 \end{pmatrix}$.

2. Lös den skalära ekvationen

$$\dot{x}(t) = -x(t)^3$$

och visa, att origo on asymptotiskt stabilt men inte exponentiellt stabilt.

3. Ett tvådimensionellt differentialekvationssystem är givet i polära koordinater:

$$\begin{aligned} \dot{r} &= 1 - r, \\ \dot{\theta} &= \sin^2 \frac{\theta}{2}. \end{aligned}$$

Polärvinklarna θ och $\theta + n2\pi$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ identifieras med varandra. De kartesiska koordinaterna erhålls ur transformationsformlerna $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$.

(a) Lös differentialekvationssystemet.

(b) Visa, att $(r, \theta) = (1, 0)$ dvs. $(x, y) = (1, 0)$ är ett jämviktsläge och att det är instabilt fastän *alla* lösningar konvergerar mot det.