Differentiaaliyhtälöt II

4. harjoitus, syksy 2008

1. Tarkastellaan lineaarista alkuarvotehtävää

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t), \\ x(0) &= \xi. \end{aligned}$$

Tutki origon stabiilisuutta (toisin sanoen, tutki onko origo epästabiili, stabiili, asymptoottisesti stabiili, eksponentiaalisesti stabiili) kun

(a) $A = \begin{pmatrix} -1 & -4 & -2 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 4 & 1 \end{pmatrix}$, (b) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & -1 \\ -1 & -1 & -2 \end{pmatrix}$,

(c) $A = \begin{pmatrix} -2 & -1 & -2 \\ -1 & -1 & -1 \\ 3 & 2 & 3 \end{pmatrix}$, (d) $A = \begin{pmatrix} -8 & -2 & -6 \\ 4 & 1 & 3 \\ 8 & 2 & 6 \end{pmatrix}$.

2. Ratkaise skalaariyhtälö

$$\dot{x}(t) = -x(t)^3$$

ja osoita, että origo on asymptoottisesti stabiili muttei eksponentiaalisesti stabiili.

3. Kaksiulotteinen differentiaaliyhtälöryhmä olkoon annettu napakoordinaatistossa:

$$\begin{aligned} \dot{r} &= 1 - r, \\ \dot{\theta} &= \sin^2 \frac{\theta}{2}. \end{aligned}$$

Napakulmat θ ja $\theta + n2\pi, n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ identifioidaan keskenään. Karteesiset koordinaatit saadaan muunnoskaavoista $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$.

   (a) Ratkaise yhtälöryhmä.

   (b) Osoita, että $(r, \theta) = (1, 0)$ eli $(x, y) = (1, 0)$ on tasapainokohta ja että se on epästabiili vaikka yhtälöryhmän *kaikki* ratkaisut suppenevat sitä kohti.