Differentialekvationer II

Räkneövning 3, höstterminen 2008

1. Transformera följande ekvationer till system av linjära differentialekvationer av första ordningen.

   (a) $\ddot{x}(t) - q(t)x(t) = f(t)$,

   (b) $x^{(4)}(t) + t\ddot{x}(t) + t^2\dot{x}(t) = 1$.

2. Visa, att $x(t) = \cos^2 t$ tillfredsställer differentialekvationen

$$\ddot{x}(t) + 2\left(1 - \tan^2 t\right) x(t) = 0$$

   och bestäm den allmänna lösningen (Vägledning: Använd resultatet p sidan 48 i kompendiet 9.10.2008).

3. Visa, att $x(t) = e^t$ tillfredsställer differentialekvationen

$$\ddot{x}(t) + p(t)\dot{x}(t) + q(t)x(t) = 0$$

   om och endast om $1 + p(t) + q(t) \equiv 0$. Lös med stöd härav ekvationen

$$(t-1)\ddot{x}(t) - t\dot{x}(t) + x(t) = 0.$$

4. Bestäm en fundamentalmatris till systemet $\dot{x}(t) = Ax(t)$ för

   (a) $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$,

   (b) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

5. Låt

$$A(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \cos t & 1 \end{pmatrix}, \quad f(t) = \begin{pmatrix} t \\ 0 \end{pmatrix}.$$

   Bestäm systemets $\dot{x}(t) = A(t)x(t)$ tillståndsövergångsmatris och lös begynnelsevärdesproblemet

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + f(t), \quad x(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$