

Differentiaaliyhtälöt II

3. harjoitus, syksy 2008

1. Muunna seuraavat kaksi yhtälöä ensimmäisen kertaluvun lineaarisiksi systeemeiksi:

(a) $\ddot{x}(t) - q(t)x(t) = f(t)$,

(b) $x^{(4)}(t) + t\ddot{x}(t) + t^2\dot{x}(t) = 1$.

2. Osoita, että $x(t) = \cos^2 t$ toteuttaa differentiaaliyhtälön

$$\ddot{x}(t) + 2(1 - \tan^2 t)x(t) = 0$$

ja etsi yhtälön yleinen ratkaisu (Ohje: Käytä monisteen 9.10.2008 sivulla 48 olevaa tulosta).

3. Osoita, että $x(t) = e^t$ toteuttaa differentiaaliyhtälön

$$\ddot{x}(t) + p(t)\dot{x}(t) + q(t)x(t) = 0$$

jos ja vain jos $1 + p(t) + q(t) \equiv 0$. Ratkaise tämän nojalla

$$(t - 1)\ddot{x}(t) - t\dot{x}(t) + x(t) = 0.$$

4. Etsi systeemin $\dot{x}(t) = Ax(t)$ perusmatriisi kun

(a) $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$,

(b) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

5. Olkoot

$$A(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \cos t & 1 \end{pmatrix}, \quad f(t) = \begin{pmatrix} t \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Määritä systeemin $\dot{x}(t) = A(t)x(t)$ tilansiirtomatriisi ja ratkaise alkuarvotehtävä

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + f(t), \quad x(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$